

- Section Subcommittee of the Standard Testing Procedure Committee. J. Amer. ceram. Soc. **27** (1944) S. 85–89.
- [18] GHERING, L. G. und KNIGHT, M. A.: Properties and diagnosis of cords in pressed and blown glassware. J. Amer. ceram. Soc. **27** (1944) S. 260–266.
- [19] ZARBO, G. J., HUNT, H. J. und SMITH, D. C.: Analysis of cords and stones. J. Amer. ceram. Soc. **27** (1944) S. 138–142.
- [20] GHERING, L. G.: Refined method of control of cordiness and workability of glass during production. J. Amer. ceram. Soc. **27** (1944) S. 373–387.
- [21] SCHELJUBSKIJ, W. J. und KARTSCHMAR, Z. A.: Verbesserte Überwachungsmethode für die Homogenität der Glasschmelze. Steklo i Keram. **18** (1961) S. 16–20.
- [22] SCHELJUBSKIJ, W. J.: Neue Methode zur Bestimmung und Kontrolle der Gleichmäßigkeit von Glas. Steklo i Keram. **17** (1960) S. 17–22. Glass and Ceram. **17** (1960) S. 412–418.
- [23] RADEMAKER, S. C. und DE ROUW, H. J.: Quelques possibilités d'identification des cordes dans le verre. Silic. Ind. **28** (1963) S. 541–544.
- [24] RUSS, A.: Einfluß der Glasherstellung und Verarbeitung auf seine Sprödigkeit. Glastechn. Ber. **9** (1931) S. 481 bis 501, 529–543.
- [25] SCHARDIN, H.: Das Schlierenmikroskop und seine Anwendung in der Glastechnik. Glastechn. Ber. **27** (1954) S. 70–79.
- [26] RAMSAUER, R.: Anwendung des Schlierenmikroskopes zur Untersuchung der Schichtung von Tafelglas. Glastechn. Ber. **27** (1954) S. 374–381. (41896)

DK 536.25:666.1.031.13:532.5:517.947.43

Berechnung von Konvektionsströmungen in Glasschmelzwannen

Von JOACHIM VON PESCHKE, Darmstadt

(Mitteilung aus dem Institut für Praktische Mathematik der Technischen Hochschule Darmstadt)

(Eingegangen am 21. Januar 1965)

Für die industrielle Herstellung von Glas sind die Strömungen in Schmelzwannen von Bedeutung. Ursache für die Strömung ist unter anderem die ungleichmäßige Erwärmung und Ausdehnung von flüssigem Glas, das unter dem Einfluß der Schwerkraft steht. Die Wärmekonvektion spielt auch bei der Wolkenbildung und bei der Wärmeisolation in Bauwerken eine Rolle. Das Problem ist also von genügend allgemeinem Interesse, um einen Lösungsversuch zu rechtfertigen. So werden mit Hilfe des Differenzenverfahrens einige einfache Fälle numerisch durchgerechnet. Die Resultate für große Rayleigh-Zahlen zeigen Grenzschicht-Verhalten.

1. Die Differentialgleichungen für die Wärmekonvektion

Die Berechnung von Konvektionsströmungen wird im folgenden auf stationäre, zweidimensionale Bewegungen eingeschränkt; eine dieser beiden Dimensionen soll die Schwererichtung sein. Die Flüssigkeit wird als quasi-inkompressibel angenommen, das heißt bei der Massen- und Energiebilanz wird die Dichte als Konstante behandelt, in der Gleichung für die Volumenkraft jedoch der Auftrieb berücksichtigt. Alle anderen Materialgrößen seien von der Temperatur unabhängig. Die Bewegung sei schleichend; es sollen also keine nennenswerten Trägheitskräfte auftreten. Von der Wärmeerzeugung durch Reibung (Dissipation) in der Flüssigkeit wird abgesehen. Außer der Wärmeübertragung durch Konvektion und Leitung spielt die Wärmestrahlung eine Rolle; sie wird aber vernachlässigt.

Die Konvektion unter den vorstehenden Annahmen läßt sich durch ein System von nichtlinearen partiellen Differentialgleichungen für das Geschwindigkeitsfeld und das Temperaturfeld beschreiben [1].

$$\frac{\partial P}{\partial y'} \frac{\partial T'}{\partial x'} - \frac{\partial P}{\partial x'} \frac{\partial T'}{\partial y'} = \frac{\partial^2 T'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 T'}{\partial y'^2}, \quad (1a)$$

$$\left| \frac{d\rho}{dT'} \right| \frac{g}{\mu \chi} \frac{\partial T'}{\partial x'} = \frac{\partial^4 P}{\partial x'^4} + 2 \frac{\partial^4 P}{\partial x'^2 \partial y'^2} + \frac{\partial^4 P}{\partial y'^4} \quad (1b)$$

$$u = \chi \frac{\partial P}{\partial y'}, \quad (1c)$$

$$v = -\chi \frac{\partial P}{\partial x'}. \quad (1d)$$

Darin bedeuten:

P dimensionsloses Potential (Vektorpotential mit nur einer Komponente; die Linien mit konstantem P sind Stromlinien),

T' Temperatur, beispielsweise in °C gemessen,
 x' Horizontalkoordinate, beispielsweise in m gemessen,
 y' nach oben positive Vertikalkoordinate,
 u x'-Komponente der Geschwindigkeit,
 v y'-Komponente der Geschwindigkeit,
 ρ Massendichte,
 g Betrag der Erdbeschleunigung, also 9,81 m s⁻²,
 μ dynamische Zähigkeit,
 χ Temperaturleitfähigkeit.

Hinzu kommen Randbedingungen:

1. An den festen Wänden ist die Geschwindigkeit Null, und zwar tangential und normal, das heißt es ist dort

$$P = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial n} = 0.$$

2. Längs einer freien Oberfläche sind nur tangential Geschwindigkeiten möglich, das heißt an der Oberfläche ist

$$P = 0,$$

und der Außendruck soll dort konstant sein, das heißt angenähert:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial n^2} = 0.$$

3. Längs des Randes sind die Temperaturwerte vorzugeben.

4. Falls T symmetrisch bezüglich einer Vertikalen verteilt ist, ist P — geeignete Randbedingungen für P vorausgesetzt — bezüglich derselben Linie antisymmetrisch. In diesem Fall braucht nur die eine Hälfte des Feldes berechnet zu werden.

Es ist zweckmäßig, die Gleichungen so umzuformen, daß dimensionslose Ähnlichkeitsparameter hervortreten, unter anderen die Rayleigh-Zahl R:

$$\frac{\partial P}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial x} \left(\frac{\partial T}{\partial y} + \frac{G}{y_n - y_2} \right) = d \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{1}{d} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (2a)$$

$$\frac{R}{(x_m - x_2)(y_n - y_2)^2} \frac{\partial T}{\partial x} = d^2 \frac{\partial^4 P}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 P}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{1}{d^2} \frac{\partial^4 P}{\partial y^4} \quad (2b)$$

$$R = (T'_{\max} - T'_{\min}) \frac{g}{\chi \mu} \left| \frac{d\varrho}{dT'} \right| b h^2 \quad (2c)$$

$$d = \frac{h(x_m - x_2)}{b(y_n - y_2)} \quad (2d)$$

$$u = \chi \frac{(y_n - y_2)}{h} \frac{\partial P}{\partial y} \quad (2e)$$

$$v = \chi \frac{(x_m - x_2)}{b} \frac{\partial P}{\partial x} \quad (2f)$$

$$T' = T'_{\min} + (T'_{\max} - T'_{\min}) \left(T + G \frac{y - y_2}{y_n - y_2} \right) \quad (2g)$$

$$x' = \frac{b}{x_m - x_2} x + \text{const } 1 \quad (2h)$$

$$y' = \frac{h}{y_n - y_2} y + \text{const } 2. \quad (2i)$$

An Aussagen über dieses System von Differentialgleichungen stehen zur Verfügung:

1. Wenn auf den senkrechten Rändern $\frac{\partial T'}{\partial y} = \text{const}$ und auf den waagrechten Rändern $\frac{\partial T'}{\partial x} = 0$ ist, ergibt sich die triviale Lösung $T = 0, P = 0$ (die allerdings nicht in jedem Fall stabil ist [2]).
2. Für die senkrecht stehende, geheizte Platte hat POHLHAUSEN eine Umformung auf gewöhnliche, nicht-lineare Differentialgleichungen 3. Ordnung angegeben [3].
3. Für den Fall von rechteckigen Zellen mit festen Wänden, $T = 0$ beziehungsweise $T = 1$ auf den vertikalen Wänden und konstantem Temperaturgradienten auf den horizontalen Wänden vermutet BATCHELOR [4] bei großem R Oszillieren von P und T' in Randnähe, und im Innern $T = 0,5$ und $\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = \text{const}$.
4. Nach COLLATZ [5] nimmt $T + G \frac{y}{y_n - y_2}$ den Kleinst- und Höchstwert nur auf dem (beliebig gelegten) Rand an, das heißt es liegt zwischen 0 und 1. Bei $\frac{G}{y_n - y_2} > 0$ kann in den Teilen mit $\frac{\partial P}{\partial x} < 0$ T' innerhalb einer beliebigen geschlossenen Berandung höchstens Minima, in den Teilen mit $\frac{\partial P}{\partial x} > 0$ höchstens Maxima haben.
5. Bekannt ist auch ein erstes Integral der Differentialgleichungen. Es ergibt sich aus der Differentialgleichung (1a), nämlich aus:

$$\text{rot}(P e_z) \cdot \text{grad } T' - \text{div } \text{grad } T' = 0.$$

Nach Integration über ein Volumenstück, das in z-Richtung (also senkrecht zu den x- und y-Richtungen) die Ausdehnung a hat, Anwendung von

$$\text{div}(\Phi b) = \Phi \text{div } b + b \cdot \text{grad } \Phi$$

und Umwandlung des Volumenintegrals in ein Flächenintegral erhält man, wenn n normal und s tangential bezüglich der Kontur bedeuten:

$$\oint [T' \text{rot}(P e_z) - \text{grad } T']_n a ds = 0.$$

Speziell für Konturen längs den Stromlinien, etwa $P = 0$, ist die Normalkomponente von $\text{rot}(P e_z) = 0$. Dort gilt also:

$$\oint \frac{\partial T'}{\partial n} ds = 0.$$

Damit können beispielsweise die numerischen Resultate kontrolliert werden.

2. Lösungsmethoden

Bei einfachen Randbedingungen führt nach POOTS [6] ein Funktionen-Ansatz zum Ziel. Bei komplizierten Randbedingungen ist, wie im folgenden zu zeigen, das Differenzenverfahren zweckmäßig. Es besteht darin, daß die sich auf das x-y-Kontinuum beziehenden Differentialquotienten der Differentialgleichungen ersetzt werden durch Differenzenquotienten für ein ebenes i-j-Punktgitter.

Bei einigen numerischen Rechnungen für spezielle Fälle wurden die Differenzenquotienten niedrigster Stufe genommen, beispielsweise wurde $\frac{\partial T}{\partial x}$ ersetzt durch $(T_{i+1,j} - T_{i-1,j})/2$ und die so entstehenden großen nicht-linearen Gleichungssysteme durch Relaxation gelöst.

Konvergenz-Geschwindigkeit und Stabilität der Rechnung ließen sich durch den Relaxationsfaktor beeinflussen (der Relaxationsfaktor gibt den Bruchteil des Restes der Einsatzprobe an, der vom alten Näherungswert abgezogen wird, um einen verbesserten Näherungswert zu erhalten).

3. Gitter, Randbedingungen und Rayleigh-Zahlen für einige durchgerechnete Fälle

Normalerweise verwendet man gleichabständig geteilte Gitter. Das ist in den hier interessierenden Fällen

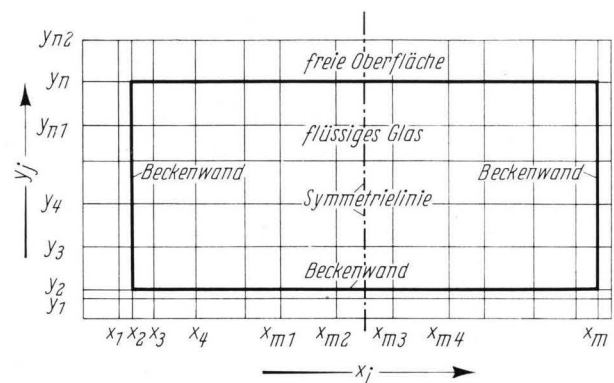


Bild 1. Das Integrationsgitter.

nicht möglich, da einige Lösungen Grenzschicht-Verhalten zeigen. Man muß die Teilung frei wählbar lassen wie in Bild 1.

m muß eine ungerade Zahl sein. Für b und h, die den Zusammenhang zwischen den dimensionslosen Koordinaten x, y und den dimensionsbehafteten Koordinaten x', y' vermitteln, wird die gesamte Beckenbreite beziehungsweise Beckenhöhe gewählt.

Das Integrationsnetz ist nur eine mathematische Hilfskonstruktion, das heißt die Lösung ist im physikalischen Sinn unabhängig von der Feinheit der Teilung, also von m und n. Im mathematischen Sinne sind m und n jedoch von Einfluß, nämlich auf die Genauigkeit der Lösung. Auch für den Rechenaufwand sind m und n bedeutsam. In den späteren Beispielen ist

$$\frac{x_m - x_2}{y_n - y_2} = 2,$$

also d das Verhältnis der Beckenhöhe zur halben Beckenbreite.

Die für P verwendeten Randbedingungen gehen aus Bild 1 hervor. Für T an der Beckenwand wird Null angenommen, und längs der freien Oberfläche von x₂ bis (x_{m2} + x_{m3})/2 steigt T linear von 0 bis (1 - G) an, das heißt T + G(y_j - y₂)/(y_n - y₂) liegt am Rand und damit auch im Gebietsinnern zwischen 0 und 1; der Anteil G, im wesentlichen der vertikale Temperaturgradient, wird zu 0,875 gewählt.

Um das Problem vollständig bestimmt zu machen, ist schließlich noch die Rayleigh-Zahl R festzulegen, in der Materialgrößen und Beckenausmaße zusammengefaßt sind. R = 0 ist uninteressant, da sich dann P = 0 ergibt; man wählt Werte zwischen 5 · 10³ und 8 · 10⁶.

Anstelle von konstantem R wird auch der Fall

$$R = R_0 \cdot \left(W + T + G \cdot \frac{y - y_2}{y_n - y_2} \right)$$
 untersucht, um heraus-

zubekommen, ob die Temperatur-Abhängigkeit der Zähigkeit μ und der Temperaturleitfähigkeit χ einflußreich ist. Dabei bleibt unberücksichtigt, daß bei genauerer Herleitung der Differentialgleichungen die Materialgrößen μ und χ auch in differenzierter Form auftreten. W = 0,2 entspricht im Intervall T' _{min} = 1050 °C bis T' _{max} = 1450 °C den Werten von grünem Flaschenglas:

$$\chi \approx (0,775 - 0,0005 \cdot T'/^\circ\text{C}) \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1} \quad (3)$$

$$\mu \approx 6000 \cdot \exp(-12,67 + 0,0087 \cdot T'/^\circ\text{C}) \text{ g cm}^{-1} \text{ s}^{-1}. \quad (4)$$

4. Resultate

Der Aufwand zur Lösung der nichtlinearen Gleichungssysteme ist so groß, daß ein Rechenautomat verwendet werden mußte (IBM 7090). Das Rechenprogramm wurde in der Programmiersprache FORTRAN geschrieben und kann bei der Deutschen Glastechnischen Gesellschaft in Frankfurt angefordert werden.

Die numerischen Ergebnisse der Rechnung (Potential P und Temperatur T) sind für die durchgerechneten 5 Fälle in den Tabellen 1 bis 5 zusammengestellt. Die für die einzelnen Fälle der Rechnung zu Grunde gelegten Rayleigh-Zahlen R und das Verhältnis Beckenhöhe zur halben Beckenbreite (d) sind jeweils angegeben.

Folgendes ist an den Resultaten bemerkenswert:

1. Es zeigt sich, daß unter den gemachten Voraussetzungen nur der R-Wert an der Stelle des P-Maximums ausschlaggebend ist, daß es also keinen Sinn hat, bei der

punktweisen Lösung der Differentialgleichungen R als Funktion von T anzusehen.

2. Bei Wahl zu grob geteilter Gitter ergibt sich eine oszillierende Lösung. Das zeigte sich:

- a. bei d = 0,25; R = 7,6 · 10⁴ und der Gitterteilung x = 1,9999; 2; 3; ...; 12 y = 1,9999; 2; 3; ...; 12 m = 21; n = 12.

- b. bei d = 0,25; R = 7,6 · 10⁵ und der Gitterteilung x = 1,9999; 2; 2,1; 2,5; 3; 4; ...; 12 y = 1,9999; 2; 3; ...; 11; 11,5; 12. m = 25; n = 13.

- c. andeutungsweise bei Fall 5

In diesen Fällen wird mit feiner geteiltem Gitter die Lösung genauer, und das Oszillieren verschwindet.

3. Mit R nimmt das Maximum P_{max} von P und damit im wesentlichen auch die maximale Geschwindigkeit zu, siehe Bild 2.

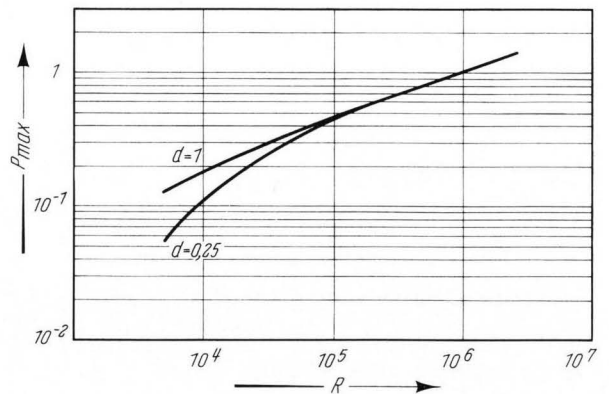


Bild 2. Das maximale Potential in Abhängigkeit von der Rayleigh-Zahl.

4. Bei großen R-Werten wird die Rechnung trotz feiner Gitterteilung instabil, wenn ein zu großer Relaxationsfaktor verwendet wird. Die Instabilität zeigt sich in sinnlosen Resultaten, etwa darin, daß dann T' nicht mehr innerhalb der Grenzen der Randwerte liegt. Bei Vergrößern von R setzt die Instabilität nicht schlagartig ein, insofern als in einem kleinen R-Bereich nicht zu schlechten Anfangswerten für T und P zunächst die Lösung verbessert, bei Fortsetzung der Rechnung für dasselbe R jedoch dann verschlechtert wird. Bei d = 0,25 liegt die Stabilitäts-Grenze für den Relaxationsfaktor 1 zwischen R = 2,4 · 10⁶ und 4,5 · 10⁶, bei d = 1 zwischen R = 4 · 10⁶ und 7 · 10⁶. Demgemäß wurden die Rechnungen für R ≤ 10⁶ mit dem Relaxationsfaktor 1 durchgeführt und diejenigen für R > 10⁶ mit dem Faktor 0,5.

5. In flachen Wannen bilden sich mit zunehmendem R an den vertikalen Wänden Grenzschichten von P und T aus. Das zeigen Bild 3 und die Tabellen 1—5. Darin bedeuten DTmax den größten Rest der Einsatzprobe für T, DPmax denjenigen für P bei 8-stelliger Rechnung. Z gibt die Anzahl der Iterationen an, die nötig waren, um von

$$P_{i,j} = 0, T'_{i,j} = (1 - G) \left(\frac{x_i - x_2}{0,5 \cdot (x_{m2} + x_{m3}) - x_2} \right) \left(\frac{y_j - y_2}{y_n - y_2} \right)$$

aus die angegebene Lösung zu erhalten, wobei 1 Iteration vereinbarungsgemäß gerade jeden Wert des Feldes einmal verbessert hat.

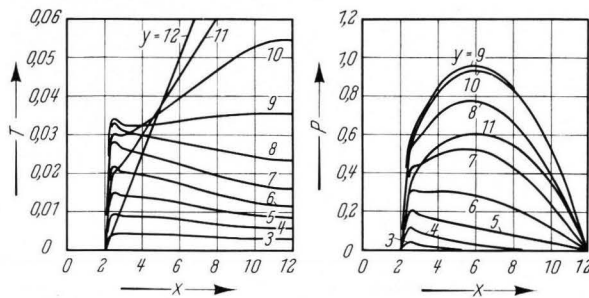


Bild 3. Verlauf von Potential und Temperatur im Fall 3. (R = 10⁶, d = 0,25)

$g = 10^3 \text{ cm s}^{-2};$
 $\mu = 400 \text{ g cm}^{-1} \text{ s}^{-1};$
 $\chi = 0,2 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}.$

Hier gilt Fall 3 mit $R = 10^6$. Man entnimmt der entsprechenden Tabelle an der Stelle $x = 6, y = 12$, daß sich das Potential P auf einer Strecke $\Delta y = 0,5$ in y -Richtung um 0,33 Einheiten ändert. Für den Betrag der dortigen Geschwindigkeit ergibt sich also:

$u(6, 12) = 0,2 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1} \frac{(12-2)}{50 \text{ cm}} \frac{0,33}{0,5} = 0,026 \text{ cm s}^{-1},$

also fast 1 Meter pro Stunde.

Im Hinblick auf industrielle Schmelzwannen ist der Fall Beckenhöhe $h = 100 \text{ cm}$, gesamte Beckenbreite

Tabelle 1. Rechenergebnisse für Fall 1
 Potential $P \cdot 1000$ ($R = 5 \cdot 10^3, d = 0,25, DP_{\max} < 10^{-7}, Z = 1000$)

$y \backslash x$	1,9999	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	13	14
13			-13	-19	-21	-22	-22	-21	-19	-15	-7		
12		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
11	0	0	13	19	21	22	22	21	19	15	7	-7	-15
10	0	0	23	34	38	40	39	38	34	27	12	-12	-27
9	0	0	29	44	49	51	51	49	44	35	16	-16	-35
8	0	0	31	47	53	54	54	52	47	37	17	-17	-37
7	0	0	29	44	50	51	51	49	44	34	16	-16	-34
6	0	0	24	36	40	42	42	40	36	28	13	-13	-28
5	0	0	17	25	28	29	29	28	25	19	9	-9	-19
4	0	0	9	13	15	15	15	15	13	10	5	-5	-10
3	0	0	3	4	4	4	4	4	4	3	1	-1	-3
2		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
1,9999		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	

Temperatur $T \cdot 1000$ ($DT_{\max} < 7 \cdot 10^{-9}$)

$y \backslash x$	1,9999	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	13	14
13			13	25	38	50	63	75	88	100	113		
12			12	23	34	45	56	67	78	89	99	99	
11	0		12	21	31	40	50	59	69	78	86	86	
10	0		11	19	27	35	44	52	59	67	73	73	
9	0		10	17	24	30	37	44	50	56	61	61	
8	0		9	15	20	25	31	36	42	46	50	50	
7	0		7	12	16	20	25	29	33	36	39	39	
6	0		6	9	12	15	18	22	25	27	29	29	
5	0		4	6	8	10	12	14	16	18	19	19	
4	0		2	3	4	5	6	7	8	9	10	10	
3	0		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
2													
1,9999													

5. Auswertung der Resultate

An Beispielen soll nun erläutert werden, wie man aus den Tabellen weitere quantitative Schlüsse ziehen kann. Angenommen, es seien Ort und Größe der maximalen Oberflächen-Geschwindigkeit zu bestimmen unter folgenden Bedingungen: Beckenhöhe $h = 50 \text{ cm}$; gesamte Beckenbreite $b = 400 \text{ cm}$; Temperatur T' an der unteren Wand $1050 \text{ }^\circ\text{C}$, an der linken Wand auf $1378 \text{ }^\circ\text{C}$ ansteigend und an der Oberfläche nach der Mitte zu weiter bis $1450 \text{ }^\circ\text{C}$ steigend (also $T'_{\min} = 1050 \text{ }^\circ\text{C}$, $T'_{\max} = 1450 \text{ }^\circ\text{C}$);

$\left| \frac{dq}{dT'} \right| = 2 \cdot 10^{-4} \text{ g cm}^{-3} \text{ }^\circ\text{C}^{-1};$

$b = 800 \text{ cm}$ bei sonst unveränderten Bedingungen interessanter. Er führt auf $R = 8 \cdot 10^6$ und maximale Oberflächengeschwindigkeiten von $0,037 \text{ cm/s}^{-1}$.

6. Schrifttum

[1] SCHLICHTING, H.: Grenzschichttheorie. Karlsruhe: Braun 1958. Darin bes. S. 58 u. 274.
 [2] MATSCHAT, K.: Über Zellularströmungen. Naturwiss. 47 (1960) S. 507 - 512.
 [3] POHLHAUSEN, E.: Der Wärmeaustausch zwischen festen Körpern und Flüssigkeiten. Z. angew. Math. Mech. 1 (1921) S. 115 - 121.
 [4] BATCHELOR, G. K.: Heat transfer by free convection. Quart. appl. Math. 12 (1954) S. 209 - 233.
 [5] COLLATZ, L.: Numerische Behandlung. Berlin: Springer 1951 S. 351 - 352.
 [6] POORS, G.: Heat transfer by laminar free convection. Quart. J. Mech. appl. Math. 11 (1958) S. 257 - 273. (41825)

