

den, da die Parabel, die die Strömungsfront bildet, für Vor- und Rückstrom eine andere Form besitzt.

Die Produkte von Geschwindigkeit und Dicke von Vorströmen liegen bei 28,5 bis 41,3 ohne Öffnung in der Trennwand und bei 31,7 bis 39,3 mit Öffnung in der Trennwand. Die Differenz zwischen dem höchsten und dem niedrigsten Wert beträgt 12,5%.

Die Produkte der Geschwindigkeit und Dicke der Rückströme liegen in einem verhältnismäßig engen Bereich von 13,5 bis 14,9 bzw. 14,0 bis 15,5. Der Unterschied zwischen dem größten und kleinsten Produkt beträgt nur 12,5%.

#### 4. Zusammenfassung

Aus den Ergebnissen läßt sich folgendes ableiten:

1. Das Strömungssystem in der Arbeitswanne gewährleistet die Entnahme frischer, aus der Schmelzwanne fließender Glasschmelze.

2. Die Glasströmung zwischen Schmelz- und Arbeitswanne reicht auch bei ungleichmäßiger Entnahme aus. Die Größe des Rückstromes ist wenig von der Entnahme abhängig, bei einer Erhöhung der Entnahme um 300% (von 1 auf 3 t/24 h) ändert sich die Durchflußmenge des Rückstromes nur um 12%.

3. Die örtlich ungleichmäßige Entnahme, die sich bis in die Schmelzwanne hinein bemerkbar macht und dadurch eine Qualitätsminderung der Schmelze verursachen könnte, kann durch eine Öffnung in der Trennwand kompensiert werden. Dieser Stromausgleich in beiden Hälften ist der Größe der Öffnung proportional. (50421)

DK 621.3.036.6:669.6:546.812:620.193.43:537.311.3:666.11-404.2:669.28

### Eigenschaften und Verhalten von keramischen Elektroden auf SnO<sub>2</sub>-Basis

Von VÁCLAV SÜSSER, Hradec Králové (ČSSR)

(Mitteilung aus dem Staatlichen Glasforschungsinstitut Hradec Králové)

(Eingegangen am 11. Juli 1969)

Es wird über die Anwendung von keramischen Elektroden auf SnO<sub>2</sub>-Basis berichtet, und es werden die Eigenschaften dieser Materialien, insbesondere der spezifische elektrische Widerstand in Abhängigkeit von der Temperatur, untersucht. Elektroden auf SnO<sub>2</sub>-Basis zeigen in PbO-haltigen Glasschmelzen ein völlig anderes Verhalten als Molybdänelektroden, wie die Ergebnisse von Versuchen mit Glasschmelzen, die 24% PbO enthielten, beweisen. Die Methoden zur Untersuchung der Korrosion der keramischen Elektroden werden beschrieben, und es werden Ergebnisse angegeben, aus denen zu entnehmen ist, daß die Korrosion der keramischen Elektroden auf SnO<sub>2</sub>-Basis in PbO-haltiger Glasschmelze 5- bis 10mal größer ist als die von Molybdänelektroden in nicht bleihaltigen Glasschmelzen.

In der glastechnischen Literatur der letzten Jahre findet man immer mehr Hinweise auf die Verwendung von keramischen Elektroden auf SnO<sub>2</sub>-Basis zum Schmelzen von Gläsern. Sie werden oft deshalb angewandt, da sich keramische Elektroden auf SnO<sub>2</sub>-Basis anders als die meisten verwendeten Molybdänelektroden verhalten. Molybdänelektroden können nicht verwendet werden bei Gläsern, die leicht reduzierbare Oxide, wie PbO, As<sub>2</sub>O<sub>3</sub>, CuO, Fe<sub>2</sub>O<sub>3</sub> usw., enthalten, also Metalloxide, die in der Spannungsreihe über dem Molybdän liegen. Metalle mit einem größeren Potential nehmen vom Molybdän Elektronen auf und werden in der Elementarform ausgeschieden (Pb, Fe, As, Cu) oder reduziert (Cu, Fe, Mn, Cr). Gleichzeitig wandern die übriggebliebenen Mo-Ionen in die Glasschmelze. Die ausgeschiedenen Metalle bzw. deren Legierungen mit Molybdän verändern die Eigenschaften der Glasschmelze bzw. der daraus hergestellten Gläser, insbesondere bei farbigen Gläsern die Spektraldurchlässigkeit.

Die Korrosion von Molybdän beim Schmelzen farbiger Gläser erhöht sich mit der Konzentration der färbenden Oxide, so daß für niedrige Konzentrationen (z. B. CuO = 0,5%) die Lebensdauer der Molybdänelektroden noch hinreichend lang ist. Bei As<sub>2</sub>O<sub>3</sub>-haltigen Gläsern können Molybdänelektroden nur bis zu einer Konzentration bis zu 0,15% verwendet werden, und bei PbO-haltigen Gläsern liegt diese Konzentration noch niedriger.

Dieses ungünstige Verhalten von Molybdänelektroden in insbesondere PbO-haltigen Schmelzen war der Anlaß zur Entwicklung leitender Keramik auf der Basis von SnO<sub>2</sub>, bei deren Anwendung keine oxydierend-reduzierende Reaktionen auftreten.

Keramische Elektroden aus SnO<sub>2</sub> oder anderen Oxiden sollten vor allem folgende Eigenschaften besit-

zen: 1. hohe elektrische Leitfähigkeit, die bei Temperaturen über 1000 °C der von Metallen nahekommt, 2. eine gute Korrosionsbeständigkeit gegenüber Glasschmelze.

Die Herstellung dieser Werkstoffe auf der Basis von SnO<sub>2</sub> ist nicht einfach, denn SnO<sub>2</sub> sintert nur sehr schwer und schrumpft leicht. Das Endprodukt ist oft deformiert und besitzt keine stabilen Eigenschaften. Die Sinterfähigkeit kann durch den Zusatz von Metallverbindungen, wie z. B. von Au, Ag, Cu, Co, Fe, Ni, Mn, Zn, K usw., in Mengen von 0,5 bis 2 Gew.-% verbessert werden. Beim Brennen dieser Erzeugnisse muß eine oxydierende Atmosphäre aufrechterhalten werden, da SnO<sub>2</sub> leicht reduziert wird.

SnO<sub>2</sub> ist ein n-Halbleiter mit Elektronenleitung. Bei Erzeugnissen aus SnO<sub>2</sub> erhöht sich bei wachsender Temperatur auch der elektrische Widerstand, der durch Zugabe von Sinterkatalysatoren noch erhöht wird. Doch kann man den elektrischen Widerstand durch den Zusatz von As-, Sb-, Ta-, Si- und U-Oxiden wieder herabsetzen. Bei niedrigen Temperaturen ist dabei Sb<sub>2</sub>O<sub>3</sub> wirksamer als Uranoxid. Die Gegenwart von Al- und Fe-Oxiden erhöht den elektrischen Widerstand. Durch geeignete Kombination von Sinterkatalysatoren und Stoffen, durch die der elektrische Widerstand verringert wird, lassen sich für das Schmelzen von Glas geeignete keramische Elektroden herstellen.

Sehr günstige Eigenschaften, niedriger elektrischer Widerstand bei tiefen Temperaturen, werden durch den Zusatz von Sb<sub>2</sub>O<sub>3</sub> (Komponente zur Herabsetzung des Widerstandes) und von CuO (Sinterkatalysator) erreicht.

Bei der Verwendung von keramischen Elektroden auf SnO<sub>2</sub>-Basis zum Glasschmelzen muß deren Oberfläche mit einer glasigen Schicht versehen werden, um zu verhindern, daß bei den üblichen Ofenatmosphären SnO<sub>2</sub> reduziert wird.

Tabelle 1. Spezifischer Widerstand einiger SnO<sub>2</sub>-haltiger keramischer Stoffe in Abhängigkeit von der Temperatur

Material	Spezifischer elektrischer Widerstand in Ω cm bei Temperatur in °C											
	200	300	400	500	600	700	800	900	1000	1200	1400	
Corhart 1185 in der ČSSR entwickeltes Material	50,8	6,35	1,143	0,254	0,089	0,030	0,010	0,003	0,003	0,003	0,003	0,003
	0,0770	0,0610	0,041	0,029	0,019	0,011	0,0071	0,0046	0,0028	0,0026	0,0026	0,0026

Tabelle 2. Eigenschaften einiger SnO<sub>2</sub>-haltiger keramischer Stoffe

Material	Wärmedehnung in 10 <sup>-7</sup> /grd	Dichte in g cm <sup>-3</sup>	Wärmeleitfähigkeit in cal cm <sup>-1</sup> s <sup>-1</sup> grd <sup>-1</sup>	spezifische Wärme in cal g <sup>-1</sup>	Porosität in %
Corhart 1185	43,0	6,1	57 (100 °C)	0,106 (27 bis 800 °C)	1,58
in der ČSSR entwickeltes Material	39,5	6,2	—	—	unter 1

Tabelle 3. Korrosionsgrad (bezogen auf Unicor) einiger keramischer Stoffe auf SnO<sub>2</sub>-Basis

Glasart	Temperatur in °C	Korrosionsgrad <sup>1)</sup>		
		Unicor	Zac 501	Corhart 1185
Kalk-Natron- glas	1400	100	89	259
Flachglas	1450	100	78	367
	1500	100	52	278
Amberglas	1450	100	80	95
E-Glas	1500	100	62	523
Borosilicatglas	1550	100	76	110

<sup>1)</sup> Erklärung im Text.

### 1. Eigenschaften der keramischen Elektroden auf SnO<sub>2</sub>-Basis

Wie bereits erwähnt wurde, ist die Temperaturabhängigkeit des elektrischen Widerstandes eine der wichtigsten Eigenschaften der zum Schmelzen von Glas verwendeten Elektroden. In Tabelle 1 sind die Werte des spezifischen elektrischen Widerstandes in Abhängigkeit von der Temperatur von Corhart 1185 und eines Stoffes auf SnO<sub>2</sub>-Basis, der im Staatlichen Glasforschungsinstitut in Hradec Králové und im Forschungsinstitut für Elektrokeramik entwickelt wurde, zusammengestellt. Einige weitere Eigenschaften dieser Materialien sind in Tabelle 2 angegeben.

Vom Hersteller werden für Corhart 1185 keine speziellen Temperatureigenschaften angegeben, die für Zac oder Korund bekannten Verfahren sollen ausreichend sein. Sind die Elektroden nicht mit einem gesinterten Belag versehen, treten leicht Verluste an SnO<sub>2</sub> durch Verflüchtigung auf. Ähnliche Erfahrungen wurden auch bei der Anwendung des in Hradec Králové entwickelten Materials gemacht.

### 2. Korrosion durch Glasschmelzen

Für die feuerfesten Stoffe Unicor (etwa 41% ZrO<sub>2</sub>, entspricht Corhart 1711), Zac 501 (33% ZrO<sub>2</sub>, entspricht Corhart 1681) und Corhart 1185 (SnO<sub>2</sub>-haltig) werden die Ergebnisse einer Reihe von Korrosionsprüfungen in verschiedenen Glasschmelzen vom Hersteller angegeben.

#### 2.1. Korrosion

##### durch nicht PbO-haltige Schmelzen

Die Untersuchungen wurden bei den entsprechenden Schmelztemperaturen der ausgewählten Gläser über

4 Tage durchgeführt. Eine Übersicht gibt Tabelle 3. Der Korrosionsgrad wird angegeben durch das Verhältnis der Tiefen der Korrosionsrillen (in mm) an den untersuchten Materialien zu der Tiefe der Korrosionsrinne (an der Grenzfläche Schmelze–feuerfester Werkstoff–Ofenatmosphäre) des Bezugswerkstoffes Unicor, wobei der Korrosionsgrad für Unicor als 100 angenommen wird. Eine größere Zahl bezeichnet eine geringere Korrosion. Wie Tabelle 3 zeigt, weist Corhart 1185 (SnO<sub>2</sub>-Material) eine viel größere Korrosionsbeständigkeit gegenüber fast allen Glasschmelzen auf. Eine Ausnahme bildet das in reduzierender Atmosphäre erschmolzene farbige Amberglas, von dem Corhart 1185 etwas stärker angegriffen wird. Unterhalb des Glasspiegels wird dieses Material etwa um die Hälfte weniger angegriffen. Von einer Kalk-Natron-Glasschmelze wird Corhart 1185 mehr korrodiert als Unicor, während Corhart 1185 von Schmelzen von Amberglas und E-Glas aber wesentlich weniger angegriffen wird als Unicor. Der Hersteller macht darauf aufmerksam, daß sich Corhart 1185 mit allen Glasarten verträgt, mit Ausnahme von Gläsern, die 2 bis 10% ZnO enthalten, durch die das Material stark zerstört wird.

#### 2.2. Korrosion durch PbO-haltige Glasschmelzen

Von der Herstellerfirma werden für Corhart 1185 keine Angaben über die Korrosion durch bleioxidhaltige Schmelzen gemacht, daher sind im Staatlichen Glasforschungsinstitut eine Reihe von Versuchen an der im Forschungsinstitut für Elektrokeramik hergestellten SnO<sub>2</sub>-haltigen Keramik durchgeführt worden. Die Versuchsanordnung war folgende: Hohlzylinder mit einem Durchmesser von etwa 20 mm wurden auf die Welle eines Propellers aufgesteckt und in die Versuchsschmelze eingetaucht. Untersucht wurde der Temperatureinfluß im Bereich von 110 bis 1500 °C und der Einfluß der Glasströmungen, die auf die Drehzahl des Mixers (10 bis 70 U/min) bezogen wird. Bild 1 zeigt die Versuchsanordnung. Die Versuche wurden in einem Superkanthalofen durchgeführt, die gesamte Versuchsdauer betrug 20 h. Alle 2 h wurden kleine Glasproben entnommen und spektralanalytisch auf ihren SnO<sub>2</sub>-Gehalt untersucht. Daraus wurde der Verlust des Prüfkörpers an SnO<sub>2</sub>/h, bezogen auf 1 cm<sup>2</sup> Fläche des Prüfkörpers berechnet (g/cm<sup>2</sup> h). Die Ergebnisse sind in den Bildern 2 und 3 dargestellt, wovon

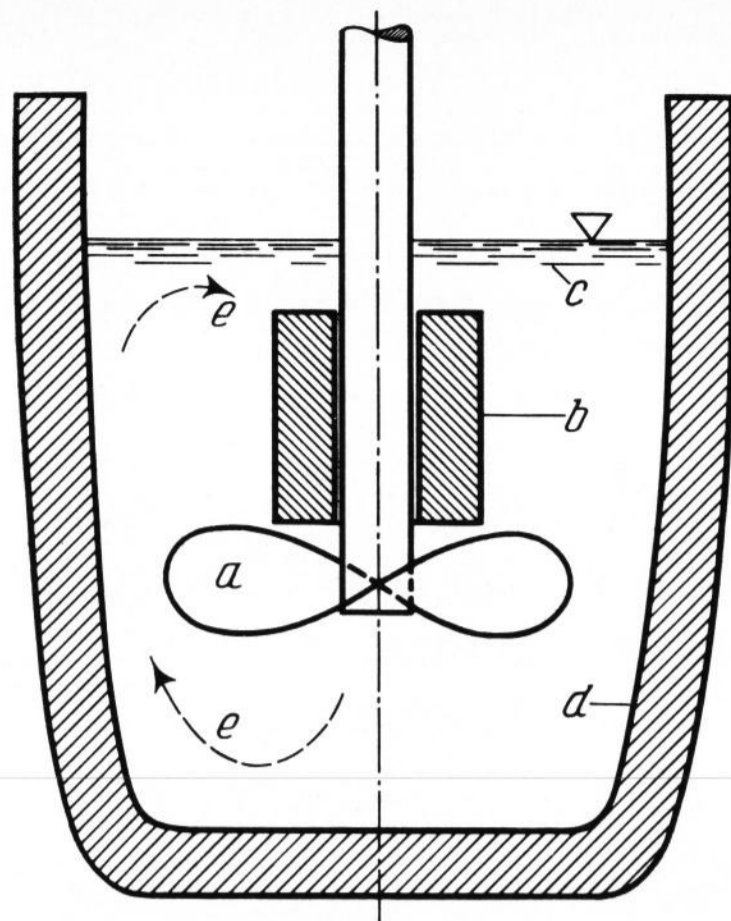


Bild 1. Prüfung der Korrosion der SnO<sub>2</sub>-Keramik durch die Glasschmelze.

- a=Propellermischer aus Platin,
- b=Hohlzylinder aus SnO<sub>2</sub>-Keramik,
- c=Schmelze mit einem Gehalt von 24% PbO,
- d=Platintiegel,
- e=Strömungsrichtung der Schmelze.

Bild 3 den Einfluß der Drehzahl auf die Korrosion deutlich macht.

Die Ergebnisse zeigen, daß die Korrosion der Prüfkörper deutlich von der Temperatur abhängig ist. Der Einfluß der Strömung ist nur in einem geringeren Maße zu bemerken. Bei 1500 °C wird die SnO<sub>2</sub>-Keramik bereits so angegriffen, daß Elektroden aus diesem Material eine zu kurze Lebensdauer hätten.

Aus den Ergebnissen läßt sich auch die Auflösungs-geschwindigkeit der Elektroden aus SnO<sub>2</sub>-Keramik in einer Bleiglasschmelze und damit deren ungefähre Lebensdauer berechnen. Hat die Bleiglasschmelze eine Temperatur von etwa 1350 °C und ist die Strömung im Vergleich zu den Laborversuchen zu vernachlässigen, so hat die Korrosion den Wert 20 · 10<sup>-4</sup> g/cm<sup>2</sup> h. Dividiert man diesen Wert durch das spezifische Gewicht der Elektrode (6,2 g/cm<sup>3</sup>), so erhält man den Verlust an SnO<sub>2</sub> in cm/h, was bei stabförmigen Elektroden die Abnahme des Radius bedeutet. Man erhält dafür einen Wert von 3,2 · 10<sup>-4</sup> cm/h, das bedeutet, daß in 10000 h (etwa 416 Tagen) der Durchmesser der Elektrode um 6,4 cm abnimmt. Dieser ziemlich hohe Wert zeigt, daß zum Schmelzen von Bleiglas keine stabförmigen Elektroden verwendet werden können.

Bei Betriebsversuchen, die an einer kleinen Wanne des Typs SVUS mit einer Schmelzleistung von 300kg/24h bei 1350 °C durchgeführt wurden, erhielt man für die Korrosion jedoch erheblich geringere Werte (0,7 bis 1,3 · 10<sup>-4</sup> cm/h). Das entspricht einer Abnahme des Durchmessers einer stabförmigen Elektrode in 10000 h um 1,4 bis 2,6 cm, was einen für die Praxis annehmbaren Wert darstellt, wenn Elektroden mit einem hinreichend großen Durchmesser verwendet werden. Die Diskrepanz zwischen den aus den Laborversuchen und den in der Praxis erhaltenen Werte erklärt sich dadurch, daß die Strömung in der näheren Umgebung der Elektrode nach Bild 3 in der Praxis einen geringeren Einfluß auf die

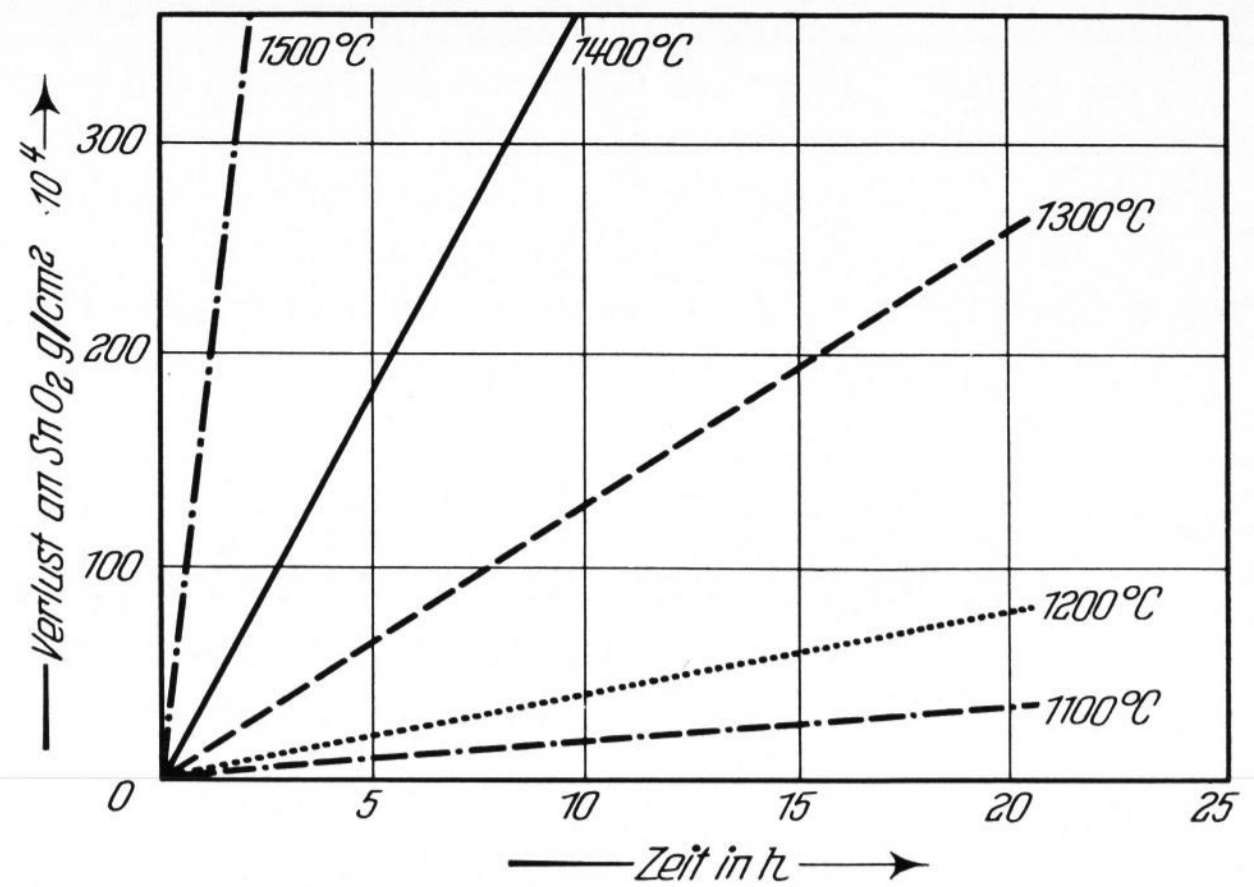


Bild 2. Abhängigkeit des SnO<sub>2</sub>-Verlustes von der Zeit in g/cm<sup>2</sup> bei verschiedenen Temperaturen und konstanter Drehzahl des Mixers.

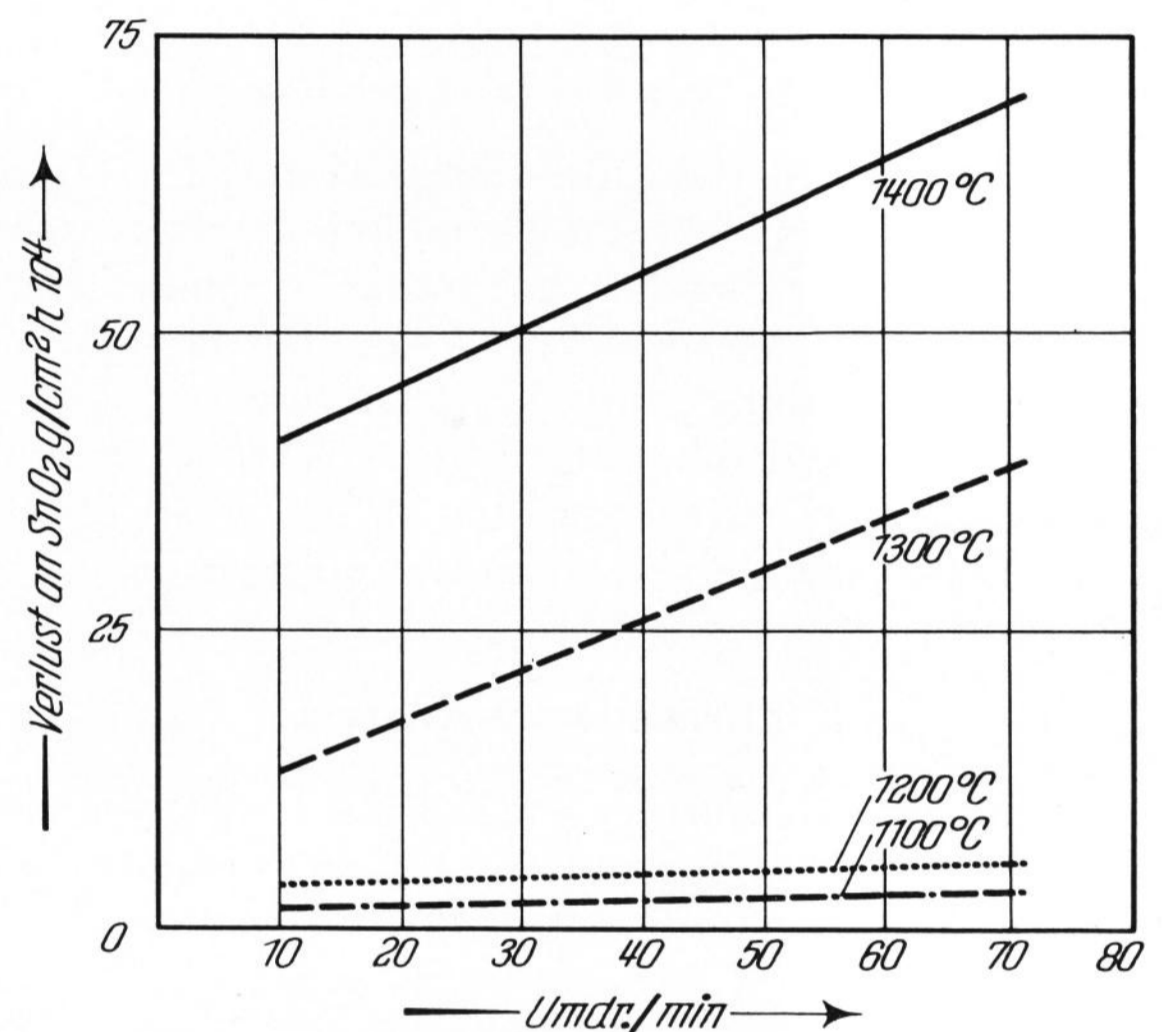


Bild 3. Abhängigkeit des SnO<sub>2</sub>-Verlustes von der Drehzahl des Mixers bei verschiedenen Temperaturen.

Korrosion hat, als aus den Laborversuchen zu erwarten wäre.

In einer Natron-Kalk-Glasschmelze mit einem Gehalt an Sb<sub>2</sub>O<sub>3</sub> von 0,4% bei 1400 °C beträgt der Wert für die Korrosion von Molybdänelektroden 0,15 · 10<sup>-4</sup> cm/h; das heißt, der Durchmesser der Elektrode nimmt in 10000 h um 0,3 cm ab, also 5- bis 9mal weniger als bei Elektroden auf SnO<sub>2</sub>-Basis, wobei zu beachten ist, daß durch Temperaturschwankungen über 1350 °C die Korrosion der SnO<sub>2</sub>-Elektroden noch verstärkt wird. In jedem Falle können SnO<sub>2</sub>-Elektroden nur bei niedrigsten Schmelztemperaturen verwendet werden, und der Durchmesser muß so gewählt werden, daß eine Lebensdauer von mindestens einem Jahr erreicht wird.

Die Untersuchungen am Staatlichen Glasforschungsinstitut werden fortgesetzt, um die Korrosion von keramischen Elektroden auf SnO<sub>2</sub>-Basis durch Glasschmelzen mit unterschiedlichem Gehalt an PbO und anderen Oxiden mit verschiedener Wertigkeit zu bestimmen, gleichzeitig soll der Einfluß der Strombelastung geprüft werden.

### 3. Zusammenfassung

Die Untersuchung der Korrosionsbeständigkeit von keramischen Elektroden auf  $\text{SnO}_2$ -Basis hat ergeben, daß diese zum Erschmelzen von Bleigläsern nur bei niedrigen Temperaturen verwendet werden können. Bei Temperaturen über  $1400^\circ\text{C}$  ist die Lebensdauer der Elektroden zu kurz, und daher ist die Anwendung unwirtschaftlich.

Da keramische Elektroden auf  $\text{SnO}_2$ -Basis wesentlich stärker als z. B. Molybdänelektroden korrodiert werden, müssen sie einen wesentlich größeren Durchmesser aufweisen. Daraus geht hervor, daß es jetzt noch nicht möglich ist, Molybdänelektroden ganz durch keramische Elektroden auf  $\text{SnO}_2$ -Basis zu ersetzen.

(50422)

DK 666.1.031.5:621.3.036.6:537.212:666.1.031.13:536.12:621.3.026

## Über die Verteilung der elektrischen Energie zwischen den Elektroden und die Beeinflussung des Temperaturfeldes durch die thermischen Eigenschaften der Glasschmelze

Von JOSEF VACH und VÁCLAV DUŠÁNEK, Hradec Králové (ČSSR)

(Mitteilung aus dem Staatlichen Glasforschungsinstitut in Hradec Králové)

(Eingegangen am 11. Juli 1969)

Es wird das elektrische Feld im Schmelzbereich eines elektrisch beheizten Glaswannenofens mit sechs vertikal angeordneten Elektroden berechnet und analysiert. Ferner wird der Gradient des elektrischen Feldes für zwei verschiedene Elektrodendurchmesser ermittelt und der Einfluß des Elektrodenabstandes auf die Schmelzleistung untersucht. An Hand von Messungen der Temperaturverteilung im Schmelzbereich einer elektrisch beheizten Modellwanne wird die Wirkung des Strahlungsanteiles der Wärmeleitfähigkeit für drei Glasarten besprochen.

Im Staatlichen Glasforschungsinstitut in Hradec Králové wurde versucht, die Verteilung der elektrischen Energie in der Schmelzwanne unter vereinfachenden Voraussetzungen zu berechnen. Die Berechnung der Temperaturverteilung und der dem Schmelzbad von stabförmigen Elektroden zugeführten elektrischen Energie bereitet einige Schwierigkeiten, da die physikalischen Eigenschaften der Versuchsschmelze oft nicht genau bekannt sind.

### 1. Theoretische Analyse

Allgemein kann man sagen, daß die spezifische elektrische Energie, bezogen auf das Einheitsvolumen eines isotropen leitenden Mediums, gegeben ist durch die Beziehung

$$N_m = \gamma |\text{grad } V|^2, \quad (1)$$

mit  $N_m$  = spezifische elektrische Leistung in  $\text{W}\cdot\text{cm}^{-3}$ ,  $\text{grad } V$  = elektrischer Feldgradient in  $\text{V}\cdot\text{cm}^{-1}$  und  $\gamma$  = spezifische elektrische Leitfähigkeit in  $\text{A}\cdot\text{V}^{-1}\cdot\text{cm}^{-1}$ . Bei einem Medium mit konstanter elektrischer Leitfähigkeit stellt die Funktion  $\text{grad } V$  einen entscheidenden Parameter zur Bestimmung des elektrischen Potentialfeldes dar.

Die Funktion  $\text{grad } V$  im zweidimensionalen Medium ist allgemein durch die Beziehung

$$\text{grad } V = \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \quad (2)$$

und ihr absoluter Wert durch die Beziehung

$$|\text{grad } V| = \sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2} \quad (3)$$

definiert.

Zur Bestimmung der Größe von  $\text{grad } V$  ist es nötig, den Verlauf des Potentials  $V$  zu untersuchen. In einem leitenden zweidimensionalen, homogenen und isotropen Medium mit konstanter elektrischer Leitfähigkeit gilt für einen quellenfreien Fall die Laplace-Gleichung

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0, \quad (4)$$

mit  $V$  = elektrisches Potential in  $\text{V}$  und  $x, y, z$  = unabhängig veränderliche Koordinaten.

Damit die Gleichung (4) eine eindeutige Lösung im betrachteten Bereich hat, ist es nötig, Randbedingungen festzulegen. Als Randbedingungen werden gestellt: 1. Wert von  $V$  an den Grenzen des untersuchten Bereiches, 2. Wert der Ableitung von  $V$  nach der Normalen an den Grenzen des untersuchten Bereichs und 3. bestimmte Funktion von  $V$  bzw. deren Ableitung an den Grenzen des untersuchten Bereichs.

In der Literatur werden z. B. in [1] eine Reihe von Lösungsmethoden partieller Differentialgleichungen der Art wie Gleichung (4) angegeben. Ursprünglich war die Lösung von Gleichung (4) durch Modelluntersuchungen an einem elektrischen Feld in einer flachen elektrisch beheizten Modellwanne untersucht worden. Numerische Lösungen von Gleichung (4) lassen sich mit Hilfe des Netzverfahrens erhalten, mit dem genauere Lösungen als mit Modellversuchen gewonnen werden. Mit diesem Verfahren kann Gleichung (4) mit den angegebenen Randbedingungen verhältnismäßig leicht gelöst werden.

Nach dem von PAVLOV [2] beschriebenen Netzverfahren wird der zu untersuchende Bereich durch ein Netz von Geraden, die parallel zu den Koordinatenachsen im Abstand  $\Delta x$  und  $\Delta y$  gelegt werden, unterteilt. Das elektrische Potential  $V$  wird dann in den Schnittpunkten der Geraden bestimmt.

In Gleichung (4) werden die partiellen Ableitungen durch die Enddifferenzen ersetzt. Nach Umformungen ergibt sich dann

$$V_{i-1,k} + V_{i+1,k} + V_{i,k-1} + V_{i,k+1} - 4V_{i,k} = 0, \quad (5)$$

wobei  $i, k$  die Koordinaten der Punkte mit dem Potential  $V$  sind. Ähnlich erhält man nach Ersetzen der partiellen Ableitungen in Gleichung (3) durch Enddifferenzen eine Beziehung, mit der  $\text{grad } V$  in den Schnittpunkten der Geraden bestimmt werden kann. Nach Einsetzen und Umformen ist

$$|\text{grad } V_{i,k}| = \frac{1}{2h} \sqrt{(V_{i+1,k} - V_{i-1,k})^2 + (V_{i,k+1} - V_{i,k-1})^2} \quad (6)$$

mit  $h = \Delta x = \Delta y =$  ein Netzschritt.