

## Stabilität von Elektroglasschmelzwannen

Von Gerhard Hilbig, Weimar

(Mitteilung aus der Hochschule für Architektur und Bauwesen, Sektion Baustoffverfahrenstechnik, WB Physik, Weimar)

(Eingegangen am 15. Dezember 1980)

Es wird gezeigt, wie das Stabilitätsverhalten einer Elektroglasschmelzwanne untersucht werden kann. Das Problem wurde bewußt sehr vereinfacht. Für einen eindimensionalen Reaktor als Modell eines Schmelzreaktors können Instabilitäten nachgewiesen werden. Schmelzaggregate, deren Schmelzen eine konstante elektrische Leit-

fähigkeit besitzen, sind demnach immer stabil. Die Instabilitäten werden durch die Temperaturabhängigkeit der elektrischen Leitfähigkeit verursacht. Die vorliegende Arbeit stellt einen ersten Beitrag zu dieser Problematik dar.

### Stability of electric glass melting furnaces

How the stability of an electric glass melting furnace may be investigated is shown. The problem is treated in a very simplified fashion. For a one dimensional reactor serving as a model for a melting unit, instabilities can be demonstrated. Melting units in which the melt

has a constant electrical conductivity are however always stable. Instabilities arise from the temperature dependence of the electrical conductivity. The present work is only a first contribution concerning this problem.

### Stabilité des fours de fusion électrique du verre

On montre comment peut être étudiée la stabilité d'un bassin de fusion. Le problème a été sciemment simplifié à l'extrême. Des instabilités ont été mises en évidence sur un réacteur unidimensionnel servant de modèle de réacteur de fusion. Les fours de fusion, dont les fontes ont

une conductivité électrique constante, sont dès lors toujours stables. Les instabilités sont dues au fait que la conductivité électrique varie avec la température. La présente étude est une première étape dans la résolution de ce problème.

Stabile und instabile Systeme sind aus der Mechanik hinreichend bekannt. Aber auch thermische, magneto-hydrodynamische u. a. Systeme können sich im stabilen bzw. instabilen Zustand befinden.

Es gibt mehrere Arbeiten, die sich mit der Stabilität thermischer Systeme befassen (z. B. [1]); Probleme der magneto-hydrodynamischen Stabilität werden in jedem Buch über Plasmaphysik (z. B. [2]) behandelt.

Ob Elektroglasschmelzwannen stabile oder instabile Systeme darstellen, wurde bisher nach den in [1] und [2] beschriebenen Methoden nicht untersucht. Eine Arbeit des Autors [3] sowie Dissertationen von Langer [4] und Seidel [5] geben erste Hinweise darauf, daß solche Aggregate instabil sind und nur durch eine Regelung künstlich infolge ihrer großen Zeitkonstanten quasi stabil gehalten werden können. Deshalb soll in diesem Beitrag ein erster Versuch unternommen werden, das zeitliche Verhalten solcher Aggregate bezüglich thermischer Störungen in Analogie zu [1] und [2] zu studieren.

### 1. Theorie

Zur Untersuchung dieser Erscheinung soll für die Glasschmelze von der instationären Wärmeleitungsgleichung

$$\rho c \dot{T} - k \Delta T = \kappa E^2 \quad (1)$$

mit der elektrischen Leitfähigkeit

$$\kappa = \kappa_B \cdot \exp [b (T - T_B)] \quad (2)$$

ausgegangen werden, wobei ein konvektiver Energietransport zunächst ausgeschlossen wird. Dabei sind  $\rho$  die Dichte,  $c$  die spezifische Wärmekapazität,  $k$  die Wärmeleitfähigkeit,  $\kappa_B$  die elektrische Leitfähigkeit bei der Temperatur  $T_B$ ,  $\vec{E}$  die elektrische Feldstärke,  $\Delta$  der Laplace-Operator und  $b$  der Temperaturkoeffizient der elektrischen Leitfähigkeit.

Zur Zeit  $t = 0$  liege in der Schmelzwanne ein stationäres Temperaturfeld  $T_0$  vor. Eine kleine Störung  $\Theta$  verändere dieses. Die Frage ist nun, wie sich das Temperaturfeld  $T = T_0 + \Theta$  im Laufe der Zeit verändert. Klingt die Störung ab, dann ist das System stabil. Im entgegengesetzten Fall läuft das Temperaturfeld davon (z. B. thermische Explosion), und es liegt ein instabiles thermisches System vor.  $T_0$  sei außerdem infolge der genannten Voraussetzung die Lösung der Differentialgleichung

$$-k \Delta T = \kappa_0 E^2 \quad (3)$$

Mit  $T = T_0 + \Theta$  ergibt sich

$$\Theta - \frac{k}{\rho c} (\Delta \Theta + \Delta T_0) = \frac{\kappa_0 E^2}{\rho c} \exp (b \Theta) \quad (4)$$

Unter Berücksichtigung von Gleichung (3) sowie  $e^x = 1 + (e^x - 1)$  entsteht die Differentialgleichung

$$\dot{\Theta} - \frac{k}{\rho c} \Delta \Theta = \frac{\kappa_0 E^2}{\rho c} [\exp(b\Theta) - 1] \tag{5}$$

für das Temperaturfeld  $\Theta$ . Bei Beschränkung auf kleine Störungen hat man die Differentialgleichung

$$\dot{\Theta} - \frac{k}{\rho c} \Delta \Theta = \frac{\kappa_0}{\rho c} E^2 b \Theta \tag{6}$$

zu untersuchen. Dazu werde der Ansatz

$$\Theta = \exp(\sigma t) \cdot G(\vec{r}) \tag{7}$$

verwendet, mit dem Gleichung (6) in

$$\sigma - \frac{k}{\rho c} \cdot \frac{\Delta G}{G} = \frac{\kappa_0}{\rho c} E^2 b \tag{8}$$

übergeht.

Im allgemeinen sind  $\kappa_0 = \kappa(T_0(\vec{r}))$  und  $\vec{E} = \vec{E}(\vec{r})$  in einer solchen Schmelzwanne vom Ort  $\vec{r}$  abhängig, und  $\sigma$  bestimmt sich aus den Eigenwerten der Differentialgleichung

$$\Delta G + \frac{\rho c}{k} \left( \frac{\kappa_0(\vec{r})}{\rho c} E^2(\vec{r}) b - \sigma \right) G = 0. \tag{9}$$

Das Temperaturfeld in einer solchen Schmelzwanne schwankt aber nur in geringen Grenzen um einen mittleren Wert (z. B.  $T = 1500 \pm 50^\circ\text{C}$ ).

Aus diesem Grunde wird zwecks Vereinfachung des Problems angenommen, daß  $\kappa_0(\vec{r})$  und  $E^2(\vec{r})$  durch ihre räumlichen Mittelwerte  $\bar{\kappa}_0$  und  $\bar{E}^2$  ersetzt werden dürfen. Da dann der Koeffizient von  $G$  konstant ist – er wird gleich  $\lambda^2$  gesetzt –, entsteht die Differentialgleichung

$$\Delta G + \lambda^2 G = 0 \tag{10}$$

mit

$$\sigma = \frac{1}{\rho c} (\bar{\kappa}_0 \bar{E}^2 b - k \lambda^2). \tag{11}$$

Für reelle Werte von  $\lambda$  kann  $\sigma \geq 0$  werden. Ist  $\sigma > 0$ , dann liegt infolge des Ansatzes (7) Instabilität vor, die Störung wächst über alle Grenzen. Im Falle  $\sigma < 0$  klingt die Störung ab; es liegt Stabilität vor. Bei  $\sigma = 0$  wird  $\Theta$  zeitunabhängig; es stellt sich ein neuer stationärer Zustand ein. Ist  $\lambda$  imaginär, dann folgt stets  $\sigma > 0$  und damit Instabilität.

Bei komplexen Werten von  $\lambda$  entsteht mit  $\text{Re } \sigma > 0$  eine sich zeitlich periodisch aufschaukelnde Störung; damit liegt Instabilität vor. Wenn  $\text{Re } \sigma \leq 0$  ist, ergibt sich eine stabile, um den Gleichgewichtswert schwankende

Lösung. Im Falle  $\text{Re } \sigma < 0$  folgt eine zeitlich periodische, abklingende Störung, also Stabilität.

Gleichung (11) zeigt deutlich, daß für  $b = 0$  und reelle Werte von  $\lambda$  – d. h. von der Temperatur unabhängige elektrische Leitfähigkeit – immer  $\sigma < 0$  ist, was besagt, daß das System Glasschmelzwanne mit konstanter elektrischer Leitfähigkeit der Schmelze in diesem Fall stets stabil ist. In der Realität ist  $b$  immer größer als Null (siehe Tabelle 1). Dies hat Konsequenzen.

a) Eine elektrisch betriebene Glasschmelzwanne kann demnach zur Instabilität neigen oder sogar instabil sein. Derartige Lösungen liefern aber die bisher aufgestellten mathematischen Modelle solcher Aggregate nicht, die a priori Stationarität voraussetzen.

b) An physikalischen Modellen sowie mit Leitfähigkeitspapier usw. vorgenommene Untersuchungen können das wirkliche Verhalten einer solchen Schmelzwanne ebenfalls nicht richtig widerspiegeln.

## 2. Einfache Beispiele

### 2.1. Konstante Randtemperaturen

Als Beispiel diene der in [3] behandelte einfache, eindimensionale Schmelzreaktor. Dessen Begrenzungen sollen zunächst durch geeignete Maßnahmen auf der Temperatur  $T_0(x = -L) = T_0(x = +L)$  gehalten werden, was bedeutet, daß  $\Theta(x = -L) = \Theta(x = +L) = 0$  gelten muß. Im eindimensionalen Fall geht Gleichung (10) in

$$G'' = -\lambda^2 G \tag{12}$$

über, deren Lösung

$$G = A \cos \lambda x + B \sin \lambda x \tag{13}$$

lautet.

Für  $x = 0$  gilt  $G = A$ . Da  $x = 0$  Symmetrieebene ist, verschwindet die Wärmestromdichte in dieser Ebene, und

Tabelle 1. Elektrische Leitfähigkeit für  $T_B = 1300^\circ\text{C}$  und Temperaturkoeffizient der elektrischen Leitfähigkeit einiger Gläser

Glas	$\kappa_B$ in $\text{AV}^{-1} \text{m}^{-1}$	$b$ in $10^{-3} \text{K}^{-1}$
Kaliumboratglas	26	3,95
(Stoffmengengehalt (in %) : 15 $\text{K}_2\text{O}$ )		
Flachglas	18,9	3,5
Wirtschaftsglas	14,01	2,9
TK-Glas	11,5	3,6
Blei-Borosilicatglas	10,3	2,93
Bleiglas	13,5	4,19
Neutralglas D	9,066	2,81
Baryt-Kronglas	4,444	5,21
Borosilicatglas E	4,565	3,15
G 20	3,336	4,30
Simax-Borosilicatglas	2,547	3,02
E-Seidenglas	0,558	9,87
Rasotherm	1,402	3,37
Lithiumphosphatschmelze	610,5	0,82

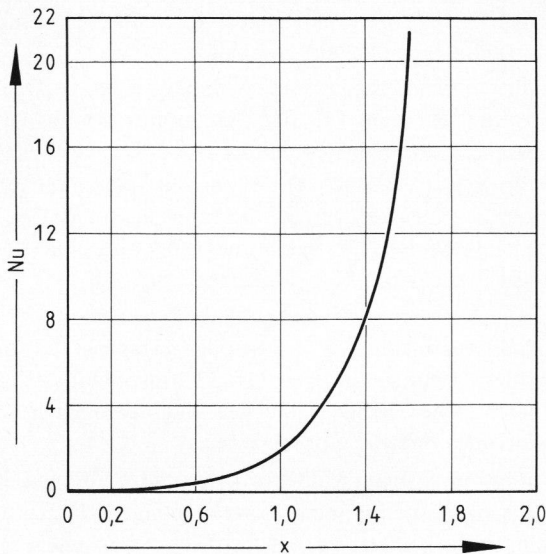


Bild 1.  $Nu = (\alpha L)/k$  als Funktion von  $x = \lambda L$ .

es muß  $G'(x = 0) = 0$  sein, was nur mit  $B = 0$  erfüllbar ist. An den Rändern soll  $G$  verschwinden, was die Eigenwerte

$$\lambda_l = \frac{1}{L} (2l + 1) \frac{\pi}{2} \tag{14}$$

mit  $l = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$  liefert. Damit ergibt sich aus Gleichung (11)

$$\sigma = \frac{1}{\rho c} \left( \bar{\kappa}_0 \bar{E}^2 b - k \frac{\pi^2}{4 L^2} (2l + 1)^2 \right) \tag{15}$$

$\sigma$  verschwindet, wenn

$$\bar{\kappa}_0 \bar{E}^2 b = k \frac{\pi^2}{4 L^2} (2l^* + 1)^2 \tag{16}$$

wird.

Da die allgemeine Lösung für das Störfeld

$$\Theta = \sum_{l=0}^{\infty} A_l \exp(\sigma_l t) \cos \lambda_l x \tag{17}$$

lautet, klingen die Glieder mit den Raumfrequenzen  $\lambda_l > \lambda_{l^*}$  mit zunehmender Zeit ab. Für diese wäre das System stabil.

<sup>1)</sup> Angeregt durch Trier [6] könnte Gleichung (15) mit  $l = 0$  in der Form

$$\sigma = \frac{\pi^2 a}{4 L^2} \left( \frac{4 \bar{\kappa}_0 \bar{E}^2 b L^2}{\pi^2 k} - 1 \right)$$

geschrieben und

$$\frac{4 \bar{\kappa}_0 \bar{E}^2 b L^2}{\pi^2 k} = Sta$$

als Stabilitätszahl definiert werden, wobei  $k$  ebenfalls als effektive Wärmeleitfähigkeit zu betrachten ist, die sich aus dem Leitungs- und Strahlungsanteil zusammensetzen kann. Für  $Sta < 1$  liegt Stabilität und für  $Sta > 1$  Instabilität vor.

Bezüglich der Glieder mit  $\lambda_l < \lambda_{l^*}$  ist das System instabil. Stabilität ergibt sich demnach erst für

$$\bar{\kappa}_0 \bar{E}^2 b \cong k \frac{\pi^2}{4 L^2}, \tag{18}$$

während das Gleichheitszeichen die Stabilitätsgrenze liefert.

### 2.2. Natürliche Randbedingungen

Soll auf den Rändern die natürliche Randbedingung

$$-k \text{grad } T \cdot \vec{n} = \alpha (T - T_A) \tag{19}$$

erfüllt werden, dann folgt aus der Lösung

$$G = A \cos \lambda x + B \sin \lambda x \tag{20}$$

mit der Symmetriebedingung  $G'(x = 0) = 0$ , die  $B = 0$  zur Folge hat, und der Randbedingung

$$-k \text{grad } \Theta \cdot \vec{n} = \alpha \Theta \tag{21}$$

die Eigenwertgleichung

$$\lambda L \tan(\lambda L) = \frac{\alpha L}{k} \tag{22}$$

Die Eigenwerte  $\lambda_l$  werden also im wesentlichen durch eine Nusselt-Zahl  $Nu = (\alpha L)/k$  und die Geometrie des Reaktors über die Größe  $L$  bestimmt.  $Nu$  in Abhängigkeit von  $x = \lambda L$  zeigt Bild 1.

## 3. Numerische Beispiele

### 3.1. Konstante Randtemperaturen

Mit  $\bar{\kappa}_0 = 5 \text{ A/Vm}$ ,  $\bar{E}^2 = 10^4 \text{ V}^2/\text{m}^2$ ,  $b = 3 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}$  und  $L = 1 \text{ m}$  folgt  $\bar{\kappa}_0 \bar{E}^2 b = 150 \text{ W}/(\text{m}^3 \text{ K})$ . Für  $k/L^2 \cdot \pi^2/4$  ergibt sich mit  $k = 50 \text{ W}/(\text{K m})$  ein Wert von  $125 \text{ W}/(\text{m}^3 \text{ K})$ .

Damit würde Instabilität vorliegen. Ist die Wärmeleitfähigkeit der Schmelze größer als  $100 \text{ W}/(\text{K m})$ , dann läge eine stabile Schmelzwanne vor. Dieses Beispiel zeigt schon, daß zur exakten Beantwortung der Stabilitätsfrage einer Wanne die exakte Kenntnis der Materialkonstanten der Schmelze gehört.

### 3.2. Natürliche Randbedingungen

Die Wärmestromdichte über das Wann Becken beträgt etwa  $5 \text{ kW}/\text{m}^2$ . Die Differenz zwischen Oberflächen- und Atmosphärentemperatur beträgt annähernd  $200 \text{ K}$ . Daraus ergibt sich ein effektiver Wärmeübergangskoeffizient von  $\alpha \approx 25 \text{ W}/\text{m}^2$  und mit den oben

verwendeten Werten  $Nu \approx 1/2$ . Dazu gehört nach Bild 1 ein Wert  $\lambda L = 0,65$ , also  $\lambda = 0,65 \text{ m}^{-1}$ . Mit  $k = 50 \text{ W}/(\text{K m})$  ergibt sich  $k \lambda^2 \approx 20 \text{ W}/(\text{m}^3 \text{ K})$ . Selbst mit einer Wärmeleitfähigkeit der Schmelze von  $150 \text{ W}/(\text{K m})$  ergäbe sich in diesem der Realität näherkommenden Fall noch Instabilität.

#### 4. Allgemeine Bemerkungen

Um das Stabilitäts- bzw. Instabilitätsverhalten einer Elektroglasschmelzwanne zu untersuchen, wird hier aus

Gründen der Vereinfachung und Verdeutlichung des Prinzipiellen nur die Wärmeleitungsgleichung ohne konvektiven Energietransport betrachtet. Die Untersuchung zeigt, daß es Instabilitäten gibt.

Im allgemeinen muß das Konvektionsglied berücksichtigt werden. Dies hat dann aber zur Folge, daß auch die Navier-Stokes-Gleichung und die elektrische Potentialgleichung berücksichtigt werden müssen. Dann wird das Problem aber sehr kompliziert. Eine solche Untersuchung soll zu einem späteren Zeitpunkt vorgestellt werden.

#### 5. Literatur

- [1] Merker, G. P.; Waas, P.; Straub, J. u. a.: Einsetzen der Konvektion in einer von unten gekühlten Wasserschicht bei Temperaturen unter  $4^\circ\text{C}$ . Wärme- und Stoffübertragung **9** (1976) S. 99–110.
- [2] Schmidt, G.: Physics of high temperature plasmas. New York und London: Academic Press 1966.
- [3] Hilbig, G.: Temperaturfeld in einer elektrischen Glasschmelzwanne bei temperaturabhängiger thermischer und elektrischer Leitfähigkeit. Silikattechnik **29** (1978) S. 47–49.
- [4] Langer, J.: Berechnung von Temperaturfeldern in eindimensionalen elektrischen Glasschmelzreaktoren unter besonderer Berücksichtigung von temperaturabhängigen thermischen und elektrischen Leitfähigkeiten. HAB Weimar, Fak. Naturwissenschaften-Verfahrenstechnik, Diss. A, 1980.
- [5] Seidel, H.-U.: Zu einigen Fragen des vollelektrischen Schmelzens von Gläsern mittels elektrischer Widerstandsheizung. TH Ilmenau, Fak. f. Techn. Wissenschaften, Diss. B., 1978.
- [6] Trier, W.: Betrachtungen über die thermische Stabilität von Elektrowannen. — Glastechn. Ber. **53** (1980) Nr. 12, S. 348–350. 81R0253

DK 666.1.031.5:666.11-404.2:621.365.33:536.24:537.311.3  
666.762-183.4

#### Berichtigung zum Beitrag W. Trier, Glastechn. Ber. 53 (1980) Nr. 12

Im Beitrag von W. Trier „Betrachtungen über die thermische Stabilität von Elektrowannen“, Glastechn. Ber. **53** (1980) Nr. 12, S. 348–350 muß die Gleichung für  $D_{ff}$  auf S. 350 richtig lauten:

$$D_{ff} = \frac{I^2 \cdot Q_{el} \cdot l^2}{6 \kappa_L}$$