

Beitrag zur Berechnung zweidimensionaler Konvektionsströmungen in kontinuierlich betriebenen Glasschmelzwannen *)

Teil 1. Mathematisches Modell

Von GERD LEYENS, Aachen

(Vortrag auf der 48. Glastechnischen Tagung am 15. Mai 1974 in Bad Neuenahr)

(Mitteilung aus dem Institut für Industrieofenbau und Wärmetechnik im Hüttenwesen der Rheinisch-Westfälischen Technischen Hochschule Aachen)

(Eingegangen am 27. Juni 1974)

In kontinuierlich betriebenen Glasschmelzwannen mit Teppicheinlegung beeinflussen sich der Energietransport und die natürliche und erzwungene Konvektionsströmung gegenseitig. Wegen dieser Koppelung ist eine mathematische Behandlung der nichtisothermen Strömung in Verbindung mit den sehr unterschiedlichen Randbedingungen in der Glaswanne nur auf numerischem Wege möglich.

Zur Berechnung der Temperatur- und Geschwindigkeits-

verteilung in der Schmelze wurde deshalb ein zweidimensionales mathematisches Modell aufgestellt. Hierbei sind neue sogenannte Teilgebietslösungen angewandt worden, um die aus der Literatur bekannten Konvergenzschwierigkeiten zu beheben. Das mathematische Modell erlaubt Variationen der Geometrie, der Glaseigenschaften und der Randbedingungen für das Temperatur- und das Strömungsfeld.

Contribution to the calculation of two dimensional convection currents in continuous glass tank furnaces. Part 1. Mathematical model

In continuous tanks with blanket charging there are mutual interactions between energy transport, free convection and forced convection. Because of this coupling a mathematical treatment of non-isothermal flow is possible for the widely differing boundary conditions only by numerical methods.

A two dimensional mathematical model for the temperature and velocity distributions in the melt was set up. To avoid the well known difficulties of convergence the new method of section solution was used. The model permits changes in geometry, glass properties and boundary conditions for both temperature and flow.

Contribution au calcul des courants de convection bidimensionnels dans les fours à bassin continus. 1^{re} partie: Modèle mathématique

Dans les fours à bassin continus à enfournement en nappe, le transport d'énergie et l'écoulement par convection naturelle et forcée s'influencent mutuellement. Par suite de cette interaction et des conditions limites très différentes que l'on observe dans le bassin, un traitement mathématique de l'écoulement non isotherme n'est possible que par voie numérique.

On élabore donc un modèle mathématique bidimension-

nel qui permet de calculer la distribution des températures et des vitesses dans la fonte. Afin de résoudre les problèmes de convergence mentionnés dans la littérature, on utilise des nouvelles méthodes de solution spécifiques à chaque domaine partiel. Le modèle mathématique permet de faire varier la géométrie, les propriétés du verre et les conditions limites relatives au champ de température et d'écoulement.

1. Vergleich einiger bekannter mathematischer Modelle

In der Glasschmelzwanne sind die Schmelzleistung und die Produktqualität in hohem Maße von der im Glasbad auftretenden Strömung abhängig [1]. Darüber hinaus hat die Strömung die Funktion inne, die grundverschiedenen Verfahrensschritte des Schmelzens und der Homogenisierung miteinander zu verknüpfen und nacheinander ablaufen zu lassen.

Neben den experimentellen Modelluntersuchungen der Glasströmung [2 und 3], die eine ähnliche Wiedergabe der realen Betriebszustände nur beschränkt zulassen, sind auch mathematische Modelle entwickelt worden. Sie sollen das bisherige, aus Messungen gewonnene Bild des Temperatur- und Strömungsfeldes überprüfen und vervollständigen. Die meisten mathematischen Modelle beschränken sich auf eine zweidimensionale Bestimmung des Temperatur- und Strömungsfeldes in einem Quer- oder Längsschnitt durch die Glasschmelzwanne (v. PESCHKE [4], WRIGHT und RAWSON [5], NOBLE, CLOMBURG, HOTTEL u. a. [6]). Nur in seltenen Fällen, z. B. bei CHEN und GOODSON [7], wurden Modelle auch für dreidimensionale Felder konzipiert.

Allen genannten Modellen ist gemeinsam, daß sie in den NAVIER-STOKESSchen Differentialgleichungen die Zähigkeits- und Auftriebskräfte und in der Energiegleichung die Wärmeleitung und Wärmekonvektion berücksichtigen. Die Entnahmestromung wurde zugunsten der Auftriebsstromung in allen genannten Arbeiten vernachlässigt.

Die einzelnen Modelle unterscheiden sich dadurch, daß die Temperatur- und Strömungsfelder entweder in einem Wannenquer- [4 und 5] oder in einem Wannenlängsschnitt [6] oder sogar dreidimensional [7] entwickelt wurden. Als Berechnungsverfahren diente das Unterrelaxationsverfahren [4 und 5] und die „Alternating Direction Implicit“ (ADI)-Methode [5 bis 7]. Als Randbedingungen für das Temperaturfeld wurden zeitlich konstante Temperaturen auf dem gesamten Rand [4, 5 und 7] oder konstante Wärmestromdichten an der Oberfläche und Wärmedurchgänge durch die Ofenwände [6] vorgegeben.

*) Auszug in zwei Teilen aus der von der Fakultät für Bergbau und Hüttenwesen der Rheinisch-Westfälischen Technischen Hochschule Aachen genehmigten Dissertation des Autors (1974).

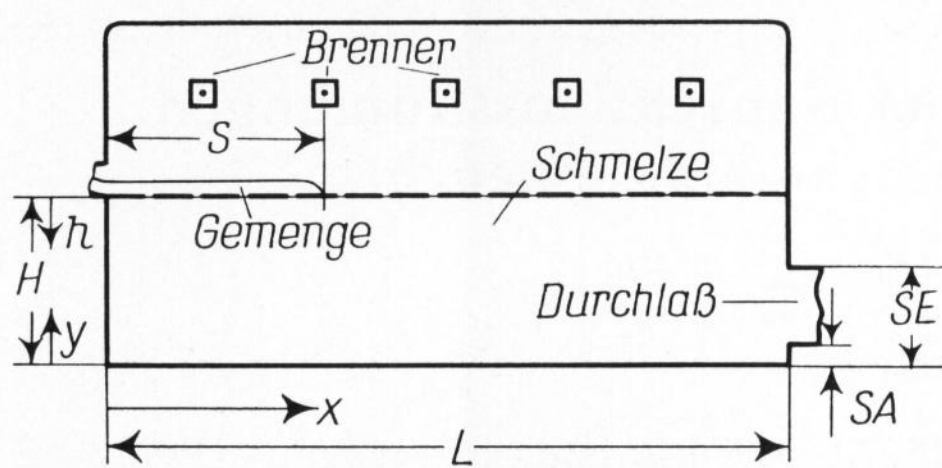


Bild 1. Prinzipskizze einer Glasschmelzwanne.

Aus dem Vergleich der mathematischen Modelle können folgende Schlüsse gezogen werden:

1. Die Vorgabe der Temperaturen auf dem Rand des Temperaturfeldes [4] stellt eine starke Vereinfachung dar, da das Strömungsfeld sich sehr empfindlich nach den gewählten Temperaturen einstellt.
2. Die Ergebnisse des in [5] aufgezeigten mathematischen Modells sind von den Abständen im Stützstellengitter abhängig. Hieraus wird deutlich, daß die in [5] verwendeten Relaxations- und ADI-Methoden gegen Lösungen konvergieren können, die physikalisch nicht begründbar sind.
3. Bei dreidimensionalen Modellen, wie sie bei der Berechnung eines elektrischen Ofens in [7] aufgestellt worden sind, mußten die Randwerte und die Stoffgrößen wegen der hohen Rechenzeiten als konstant vorgegeben werden. Die Durchsatzströmung mußte ebenfalls vernachlässigt werden. Infolge dieser starken Vereinfachungen läßt sich das in [7] beschriebene Modell nicht mehr auf die bei kontinuierlich betriebenen Glasschmelzwannen auftretenden Sonderprobleme übertragen.

2. Ziel der Arbeit

Der kurze Abriß der genannten, gegenwärtig bedeutsamen mathematischen Modelle zeigt auf, daß die Berechnung dreidimensionaler Temperatur- und Strömungsfelder unter Verwendung umfassender thermischer Randbedingungen wegen der erforderlichen hohen Rechenzeit zur Zeit nicht vertretbar ist. Deshalb wird in der vorliegenden Arbeit ein mathematisches Modell erstellt, das auf dem Bild eines Längsschnittes durch die Glasschmelzwanne basiert.

In diesem Längsschnitt soll der vom Gewölbe und den Heizgasen zur Schmelze fließende Wärmestrom über die Glasbadoberfläche ungleichförmig verteilt sein. Auf diese Weise werden Temperaturunterschiede in der Schmelze verursacht, so daß auf Grund der daraus resultierenden Dichteunterschiede Auftriebsbewegungen im Glasbad entstehen. Das Strömungsbild wird nicht nur vom Auftrieb, sondern auch vom Durchsatz geprägt, da Gemenge von einer Seite der Schmelzwanne teppichartig auf die bereits vorhandene Schmelze aufgelegt und durch seitlich im Oberofen angebrachte Brenner erschmolzen wird.

In den zu berechnenden Temperatur- und Strömungsfeldern des Längsschnitts können also nicht nur der Auftrieb, sondern auch die für das Betriebsverhalten der Glaswanne bedeutenden Einflüsse des Gemengeabschmelzens und der Durchsatzströmung erfaßt werden. In dem mathematischen Modell sollen keine Einbauten zur Umlenkung der Strömung, kein Bubbling zur Verstärkung von Strömungswalzen und auch keine elektrische Zusatzheizung (boosting) berücksichtigt werden (Bild 1).

Die bei der Ermittlung der Temperatur- und Strömungsfelder anzuwendenden numerischen Verfahren zur Lösung des betreffenden Differentialgleichungssystems sollen miteinander verglichen und daraufhin überprüft werden, unter welchen Bedingungen sie zu stabilen Lösungen führen.

Mit den Ergebnissen, die durch das mathematische Modell gewonnen werden, sollen das Betriebsverhalten der Glasschmelzwanne analysiert und aus der Variation der verschiedenen Parameter Rückschlüsse auf Wanneneinstellungen gezogen werden, die einen höheren Durchsatz erlauben, ohne die Homogenisierungsprozesse zu verschlechtern.

3. Entwicklung des mathematischen Modells

3.1. Grundgleichungen zur Beschreibung des Energie- und Impulstransports im Glasbad

Der Energie- und Impulstransport durch die Strömungen innerhalb der Glasschmelze können durch drei Differentialgleichungen charakterisiert werden:

durch die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho) = - \operatorname{div}(\rho \vec{v}), \quad (1)$$

1 2

wobei bedeuten:

- 1 = instationäre Änderung der Dichte,
2 = Masseüberschuß;

durch die Energiegleichung

$$\frac{\partial}{\partial t}(u \rho) = - \operatorname{div}(u \rho \vec{v}) - \operatorname{div} \vec{q} - (\Phi : \operatorname{div} \vec{v}), \quad (2)$$

3 4 5 6

wobei bedeuten:

- 3 = instationäre Änderung der inneren Energie,
4 = Wärmekonvektion,
5 = Wärmeleitung, Wärmestrahlung,
6 = Dissipation;

durch die Impulsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \vec{v}) = - \operatorname{div}(\rho \vec{v} \vec{v}) - \operatorname{div}(\Phi) + \rho \cdot \vec{g}, \quad (3)$$

7 8 9 10

wobei bedeuten:

- 7 = instationäre Änderung des Impulses,
8 = Impulsänderung durch Trägheitskräfte,
9 = Impulsänderung durch Zähigkeitskräfte,
10 = Impulsänderung durch Auftriebskräfte.

Diese Differentialgleichungen müssen durch einige Annahmen so vereinfacht werden, daß sie dem in der vorliegenden Arbeit neu zu erstellenden mathematischen Modell als Grundlagen dienen können.

Als solche vereinfachende Annahmen gelten hier:

- a) Die zu berechnenden Felder sollen zweidimensional sein und das Bild eines Längsschnitts durch die Mittelebene der Glasschmelzwanne wiedergeben. Diese Einschränkung setzt voraus, daß die Temperatur- und die Geschwindigkeitsverteilung (in Querrichtung), bezogen auf die Mittelebene, symmetrisch sind. Ein solcher idealisierter Zustand stimmt mit der Wirklichkeit schon

deshalb nicht überein, weil die Feuerung (innerhalb der Regeneratorzeiten) einseitig betrieben wird und die Einlegemaschinen das Gemenge nicht exakt gleichmäßig auflegen. Da diese Störeinflüsse in ihrer Intensität bisher nicht geklärt worden sind, müssen sie notgedrungen hier vernachlässigt werden, insbesondere weil sie als geringfügig eingeschätzt werden. Da die Berechnungen im Wannenlängsschnitt nur zweidimensional sind, werden nur die Anteile des Energie- und Impulsflusses in der zu betrachtenden Ebene berücksichtigt. Wenn die Strömungsgeschwindigkeit ungefähr in ihrer realen Größenordnung wiedergegeben werden soll, müßten die Auftriebsanteile, die durch Temperaturgradienten in der Längsebene hervorgerufen werden, größer sein als diejenigen, die durch Temperaturgradienten in der Querebene verursacht werden. Aus den Ergebnissen von v. PESCHKE [4] und TRIER [1] ist ersichtlich, daß gerade in der Wannenmitte die Temperaturgradienten des Wannenquerschnitts sehr flach und die Auftriebsströmung sehr gering sind. Daher gelten die berechneten Temperatur- und Strömungsverhältnisse im Wannenlängsschnitt nur für einen schmalen Bereich in unmittelbarer Nähe der Symmetrieebene und dürften auf keinen Fall auf Verhältnisse in Randgebieten übertragen werden.

b) Die Temperaturabhängigkeit der Dichte wird üblicherweise angegeben als:

$$\varrho = \varrho_0 \cdot \left[1 + \frac{1}{\varrho_0} \cdot \frac{\partial \varrho}{\partial \vartheta} \Big|_{\vartheta_0} \cdot (\vartheta - \vartheta_0) \right]. \quad (4)$$

Sie ist die Ursache für die natürliche Konvektion in der Schmelze und muß deshalb in den Auftriebsterm der Impulsgleichung (NAVIER-STOKESsche Differentialgleichung) eingesetzt werden. In den Trägheitsterm der Impulsgleichung sowie in die Energie- und Kontinuitätsgleichung kann jedoch nach SPIEGEL und VERONIS [8] eine mittlere, konstante Dichte ϱ_m eingefügt werden (Boussinesq-Approximation [8 und 9], weil folgende Ungleichung gilt:

$$\frac{\Delta \varrho}{\varrho_m} \ll 1. \quad (5)$$

c) Im gesamten untersuchten Temperaturbereich darf die Glasschmelze in guter Näherung als reine NEWTONSche Flüssigkeit angesehen werden. Es ist allerdings nötig, die dynamische Viskosität als Funktion der Temperatur zu erfassen:

$$\mu = f(\vartheta). \quad (6)$$

d) Der Temperaturausgleich durch Wärmeleitung und Wärmestrahlung wird wie in [4 bis 7] zu einem effektiven Wärmeleitungstransport zusammengefaßt. Die effektive Wärmeleitfähigkeit folgt dann aus der Rosseland-Näherung [10 bis 13]:

$$\lambda_{\text{eff}} = \lambda_{0, \text{Leit}} + \lambda_{0, \text{Str}}, \quad (7)$$

$$\lambda_{0, \text{Str}} = \frac{16 \cdot \sigma \cdot n^2 \cdot T_0^3}{3 \cdot \kappa}. \quad (8)$$

Nach KOHLER [12] ist diese Näherung zulässig, wenn die optische Dicke der Schmelze $\tau = \kappa \cdot y$ groß gegen eins ist. Eine kaum strahlungsdurchlässige Grünglasschmelze erfüllt diese Forderung besonders gut, da die spektrale optische Dicke im ungünstigsten Fall am Wannenboden

(vorausgesetzte Wannenhöhe $H = 1$ m) etwa den Wert $\tau_v = 158$ annimmt [14]. Selbst etwa 10 cm unterhalb der freien Oberfläche (wo in diesem Modell die ersten Temperaturen unterhalb der Oberfläche berechnet werden) beträgt der spektrale Transmissionsgrad nur $\Theta_v = 1,4 \cdot 10^{-7}$. Bei strahlungsdurchlässigerem Glas, wie z. B. Fensterglas, erreicht die spektrale optische Dicke am Wannenboden immerhin noch den Wert $\tau_v = 15,3$. Allerdings wächst der spektrale Transmissionsgrad etwa 10 cm unterhalb der Oberfläche auf Werte von $\Theta_v = 0,217$ an, so daß die für Fensterglas dort berechneten Temperaturen nicht mehr hinreichend genau durch Gleichung (8) wiedergegeben werden können. Durch Einführung der effektiven Wärmeleitfähigkeit λ_{eff} in die Energiegleichung (2) läßt sich die durch Strahlung übertragene Wärme mit den lokalen Temperaturgradienten verknüpfen. So wird die Schwierigkeit umgangen, eine komplizierte Integro-Differentialgleichung lösen zu müssen, die beim numerischen Lösungsverfahren sehr viel Rechenzeit in Anspruch genommen hätte.

e) Da die in der Glasschmelzwanne vorkommenden höchsten Geschwindigkeiten weniger als 5 mm/s betragen und die auf die Wannenhöhe bezogene maximale Reynolds-Zahl kleiner als eins ist, kann die Strömung in der Wanne als schleichend bezeichnet werden. Deshalb können in der Energiegleichung der Dissipationsterm und in der Strömungsgleichung der Trägheitsterm vernachlässigt werden.

f) Die Strömung in der Glasschmelze ist genau genommen nicht nur das Ergebnis des Energie- und Impulstransports, sondern wird auch von dem Stofftransport durch Diffusion beeinflusst. Da die Diffusionsvorgänge jedoch sehr langsam ablaufen, sollen in dieser Arbeit nur die für die Berechnung der Strömung bedeutsameren beiden ersten Transportarten berücksichtigt werden.

Mit den genannten Annahmen und der Einführung der Stromfunktion ψ läßt sich das in diesem Abschnitt eingangs angegebene Gleichungssystem (1) bis (3) auf folgende zwei Differentialgleichungen reduzieren:

auf die Energiegleichung

$$\varrho \cdot c \cdot \left[\frac{\partial \vartheta}{\partial t} + v_x \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + v_y \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial y} \right] = \lambda_{\text{eff}} \cdot \left[\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} \right]; \quad (9)$$

auf die Strömungsgleichung

$$\mu \cdot \left[\frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} + 2 \cdot \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^2 \cdot \partial y^2} + \frac{\partial^4 \psi}{\partial y^4} \right] + g \cdot \varrho_0 \cdot \beta \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial x} = 0, \quad (10)$$

$$\beta = \frac{1}{\varrho_0} \cdot \frac{\partial \varrho}{\partial \vartheta}. \quad (11)$$

In den beiden Gleichungen (9) und (10) sind alle Stoffwerte als konstant vorausgesetzt. Dennoch kann die Temperaturabhängigkeit der Viskosität und der effektiven Wärmeleitfähigkeit im numerischen Verfahren — wie in Abschnitt 3.3.2. noch gezeigt werden soll — berücksichtigt werden. Bei der Aufstellung der Strömungsgleichung (10) ist auf den instationären Beschleunigungsterm verzichtet worden, da im Iterationsverfahren lediglich stationäre Geschwindigkeitsverteilungen benötigt werden (siehe Abschnitt 3.3.).

Da die Strömung in der Schmelze nicht drehungsfrei ist, kann sie nicht nur durch die Stromfunktion in Gleichung (10) beschrieben werden, sondern auch durch die Geschwindigkeitskomponenten v_x und v_y in Gleichung (9).

chung (10), sondern auch durch die Rotation beschrieben werden:

$$-\mu \cdot \left[\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right] + g \cdot \varrho_0 \cdot \beta \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial x} = 0.$$

(12)

Zwischen der Rotation, der Stromfunktion und den Geschwindigkeitskomponenten bestehen dann als Verknüpfungen:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\omega,$$

(13)

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y},$$

(14)

$$v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

(15)

Die partiellen Differentialgleichungen (12) und (13) nennt man POISSONSche Gleichungen.

Die Beziehungen für die Energiegleichung (9), die Rotationsgleichung (12) und die Stromfunktionsgleichung (13) bilden ein System von gekoppelten partiellen Differentialgleichungen: Die Energiegleichung (9) hängt in den Gliedern für die Wärmekonvektion von der Geschwindigkeit ab. Die Rotationsgleichung (12) ist im Auftriebsglied und in der Viskosität eine Funktion der Temperatur. Erst aus der Verknüpfung der Rotation mit der Stromfunktion (Gleichung (13)) kann auf die zur Berechnung der Energiegleichung notwendigen Ge-

schwindigkeitskomponenten geschlossen werden (Gleichungen (14) und (15)). Infolge dieses Koppelungsgefüges wurde die Lösung des Differentialgleichungssystems durch eine Iteration zwischen dem Temperatur-, dem Rotations- und dem Stromfunktionsfeld berechnet.

3.2. Randbedingungen für das Temperatur- und Strömungsfeld

Das Differentialgleichungssystem (Gleichungen (9), (12) und (13)) wird in Verbindung mit den in Tabelle 1 zusammengefaßten Randbedingungen gelöst. Bei der Aufstellung der Randbedingungen ist man einerseits bestrebt, die Randgleichungen umfassend zu formulieren, um die realen Vorgänge möglichst genau nachzubilden, andererseits ist man gezwungen, die Randgleichungen einfach zu halten, um eine akzeptable Rechenzeit zu gewährleisten.

Um die Randbedingungen für das Temperaturfeld festlegen zu können, ist es notwendig, die Strahlungsvorgänge im Oberofen von denen im Schmelzbad zu trennen und die der Schmelze zugeführte Wärme durch einen Wärmeübergang zu ersetzen (Gleichungen (17) und (18) in Tabelle 1). Im Bereich der Gemengezufuhr wird dem Wärmeübergang von den Heizgasen zur Schmelze eine Wärmesenke hinzuaddiert, die das Aufheizen des Gemenges bis zur Schmelztemperatur, die Umwandlungsenthalpie für das Erschmelzen und ein weiteres kurzes Aufheizen der entstandenen Schmelze auf

Tabelle 1. Randgleichungen zum Temperatur- und Strömungsfeld

Koordinaten	Randbedingungen für das Temperaturfeld		Randbedingungen für das Strömungsfeld	
$0 \leq x \leq x_G$ $y = H$	$\lambda \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial y} = -\alpha_b \cdot \left[\vartheta - \vartheta_b \right] + \varrho \cdot v_{zu} \left[h_R + c_G \cdot \Delta \vartheta_G + c_S \cdot \Delta \vartheta_S \right]$	(16)	$\psi = -\int v_{zu} \cdot dx$	(24); $\frac{\partial \psi}{\partial y} = 0$
	$\vartheta_b = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + a_3 \cdot x^3 + a_4 \cdot x^4$	(17)		(25)
$x_G < x \leq L$	$\lambda \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial y} = -\alpha_b \cdot \left[\vartheta - \vartheta_b \right]$	(18)	$\psi = C_1$	(26); $\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0$
				(27)
$0 \leq x \leq L$ $y = 0$	$\lambda \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial y} = k_u \cdot \left[\vartheta - \vartheta_u \right]$	(19)	$\psi = \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0$	(28)
$x = L$	$0 \leq y \leq SA$	$\lambda \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial x} = -k_r \cdot \left[\vartheta - \vartheta_r \right]$	(20)	$\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0$
	$SA < y < SE$	$\frac{\partial \vartheta}{\partial x} = 0$	(21)	$\psi = \int v_s \cdot dy$
	$SE \leq y \leq H$	$\lambda \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial x} = -k_r \cdot \left[\vartheta - \vartheta_r \right]$	(22)	(30); $\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0$
				(31)
				(32); $\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0$
				(33)
$x = 0$ $0 \leq y \leq H$	$\lambda \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial x} = k_l \cdot \left[\vartheta - \vartheta_l \right]$	(23)	$\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0$	(34)

die Temperatur des Glasbades enthält (Gleichungen (16) und (17)). Das letztgenannte Aufheizen der Schmelze muß deshalb berücksichtigt werden, weil die im numerischen Verfahren berechnete Temperatur an der Grenzfläche Gemenge/Schmelze nicht gleich der Umwandlungstemperatur ist. Sie gibt vielmehr eine durchschnittlich in einem Gitterelement vorhandene höhere Temperatur wieder.

Da im Durchlaßbereich eine Kolbenströmung vorausgesetzt wird, soll der Temperaturgradient in Richtung der Entnahmestromung als gegen Null strebend angenommen werden (Gleichung (21)). Der Wärmestrom, der aus der Schmelze durch den Boden sowie durch Vorder- und Rückwand fließt, wird durch Wärmedurchgänge dargestellt (Gleichungen (19), (20), (22) und (23)).

Für das Strömungsfeld werden folgende Randbedingungen festgelegt: An der freien Oberfläche soll sich die Schmelze schubspannungslos bewegen. Aus dem Schubspannungsgesetz für NEWTONsche Flüssigkeiten folgt dann Gleichung (27).

Das zugeführte körnige Gemenge soll teppichartig auf der bereits vorhandenen Schmelze schwimmen und wie ein fester homogener Körper abschmelzen. Hierbei wird vorausgesetzt, daß die entstehende Glasschmelze über etwa $4/5$ der Teppichlänge konstant verteilt ist. Im letzten Fünftel reißt der Gemegeteppich erfahrungsgemäß auf, einzelne Inseln bilden sich aus (Bild 2). Dieser Vorgang wird durch eine parabelförmige Abnahme der Durchsatzströmung nachgebildet (Gleichungen (24) und (25)).

Am Boden sowie an Vorder- und Rückwand werden die üblichen Haftbedingungen (Gleichungen (28), (29), (32), (33) und (34)) festgelegt, d. h. beide Geschwindigkeitskomponenten sind dort gleich Null.

3.3. Angewandte Iterationsverfahren für die Berechnung des Temperatur- und Strömungsfeldes

3.3.1. Iteration der stationären Felder mittels Unterrelaxation

Zunächst wurde versucht, das stationäre Temperatur- und Strömungsfeld mittels eines Unterrelaxationsverfahrens zu berechnen, wie es v. PESCHKE [4] sowie WRIGHT und RAWSON [5] angewandt haben. In Gleichung (9) ist somit der Term für die instationäre Energieänderung gleich Null zu setzen. Dieses Iterationsverfahren divergiert aber vom ersten berechneten Temperaturwert an, wenn die in den Konvektionstermen der Energiegleichung enthaltenen partiellen Differentialquotienten $\frac{\partial \theta}{\partial x}$ und $\frac{\partial \theta}{\partial y}$ durch zentrale Differenzenquotienten wiedergegeben werden. Die Divergenz tritt auf, weil das sogenannte Indexkriterium [15] für Geschwindigkeiten $\vec{v} \neq 0$ nicht erfüllt ist.

Erst die Einführung einer neuentwickelten Interpolationsfunktion (ähnlich der, die in Abschnitt 3.4. für den instationären Fall beschrieben wird) oder die Benutzung der (von GOSMAN, PUN, RUNCHAL u. a. [16] entwickelten) „upwind difference“-Technik ermöglicht eine konvergente Iteration des Temperaturfeldes. In der Iteration zwischen dem Temperatur- und dem Strömungsfeld aber wird nur dann Konvergenz erzielt, wenn

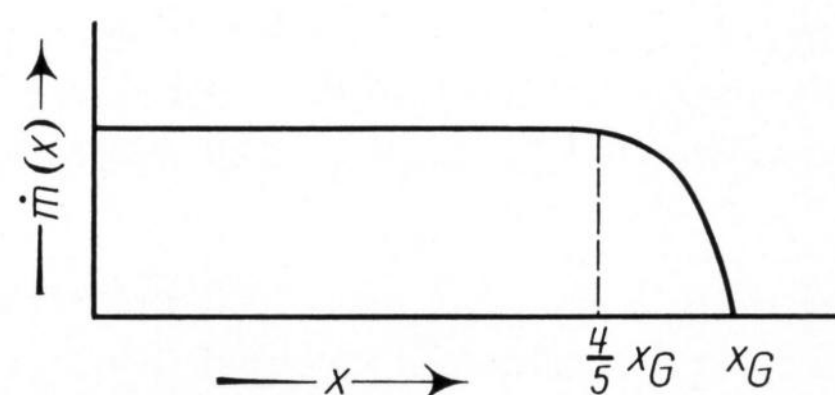


Bild 2. Verteilung der Massenstromdichte über der Länge des Gemegeteppichs x_G .

Energiegleichung (instationär):

Zeitl. Enthalpieänderung - Wärmeleitung + Konvektion

↓
Temperaturfeld

Strömungsgleichung (stationär):

↓
o-Zähigkeitskräfte + Auftriebskräfte

↓
Rotationsfeld

↓
Stromfunktionsfeld

↓
Geschwindigkeitsfeld

Bild 3. Angewandtes Iterationsverfahren zur Berechnung des Temperatur- und Strömungsfeldes.

die Rayleigh-Zahlen kleiner sind ($Ra < 10^6$) als die, die in Wirklichkeit im Glasschmelzbad auftreten.

Da aus einer anderen Problemstellung (HATTON und WOOLLEY [17]) bekannt ist, daß das Benutzen von Differenzenquotienten mit höherer Fehlerordnung oder das Anwenden einer impliziten statt einer expliziten Iterationsmethode die Konvergenz auch nicht verbessert, ist im Rahmen dieser Arbeit ein neues explizites, instationäres Iterationsverfahren entwickelt worden.

3.3.2. Gekoppelte instationäre Berechnung des Temperaturfeldes und stationäre Iteration des Strömungsfeldes

Bei dieser Rechenmethode wird von einer ruhenden Glasschmelze mit konstanter Temperatur ausgegangen. Für einen kleinen Zeitschritt Δt wird dann das durch die Randbedingungen sich verändernde Temperaturfeld berechnet. Der auf Grund dieser Temperaturverteilung entstandene Auftrieb ermöglicht die stationäre Berechnung des zu diesem Temperaturfeld gehörenden Strömungsfeldes. Hierbei wird zwischen den Verteilungen der Rotation ω und der Stromfunktion ψ entsprechend dem Gauss-Seidel-Verfahren iteriert. Das Ergebnis dieser Iteration ermöglicht es, mit Hilfe der Gleichungen (14) und (15) die Geschwindigkeitsverteilung aus den Stromfunktionswerten zu berechnen. Die Geschwindigkeitswerte werden dann in die Berechnung des Temperaturfeldes für den nächsten Zeitschritt einbezogen. Es schließt sich dann wiederum die Iteration des Rotations- und Stromfunktionsfeldes an, so wie es bereits im vorhergehenden Schritt beschrieben wurde, usw. (Bild 3).

Die genannte Iterationsvorschrift wird für die Berechnung der Temperatur, der Rotation, der Stromfunktion und der Geschwindigkeitskomponenten an den Stützstellen eines nicht äquidistanten Gitters 57×8 angewendet. Bei einer solchen Iteration ist es möglich, die Temperaturabhängigkeit der Stoffwerte λ_{eff} und μ zu erfassen, indem diese Werte bei jedem Iterationszyklus mit der jeweiligen Stützstellentemperatur neu gebildet werden.

Die Vorteile der gekoppelten instationären Ermittlung des Temperaturfeldes und der stationären Iteration des Strömungsfeldes können wie folgt zusammengefaßt werden:

1. Die zu jedem Zeitschritt erforderliche Iteration der ω - und ψ -Felder braucht nur zweimal durchgeführt zu werden.
2. Die Temperaturabhängigkeit der Stoffwerte kann größtenteils erfaßt werden.
3. Die Konvergenz der Iteration kann durch die Wahl des Zeitschrittes Δt gesteuert werden.
4. Zu jedem Zeitschritt wird das zum Temperaturfeld gehörende Strömungsfeld „passend“ (stationär) iteriert. Dadurch wird, vom Startpunkt der Berechnungen abgesehen, eine instationäre Änderung des Konvektionsverhaltens physikalisch richtig wiedergegeben.

Wenn die zur Iteration benutzten Differenzengleichungen nach den Regeln des gewöhnlichen Differenzenverfahrens gebildet werden, tritt in manchen Fällen Divergenz auf, obwohl die Konvergenz durch die Wahl des Zeitschrittes gesteuert werden kann. Im folgenden Abschnitt 3.4. wird deshalb versucht, Gründe für das Versagen des gewöhnlichen Differenzenverfahrens anzugeben und eine neue Differenzengleichung, durch die die Iteration konvergiert, in ihrer Entwicklung aufzuzeigen.

3.4. Physikalisch begründete Interpolationsfunktionen

Die Rotationsgleichung (12) und die Stromfunktionsgleichung (13), die beide POISSONSche Differentialgleichungen sind, werden üblicherweise mit dem „gewöhnlichen Differenzenverfahren“ berechnet. Hierbei werden die abhängigen Variablen an diskreten Orten durch Taylorentwicklungen aus den Nachbarstützstellen ermittelt und die in der Taylorreihe auftretenden Differentialquotienten rein formal in Differenzenquotienten überführt.

Das „gewöhnliche Differenzenverfahren“ erbringt gute Ergebnisse bei der FOURIERSchen, LAPLACESchen und der bereits genannten POISSONSchen Differentialgleichung. Der Grund hierfür liegt darin, daß den Differenzengleichungen Polynome als Interpolationsfunktionen zugrunde liegen. Diese Polynome sind Partikulärlösungen der genannten Differentialgleichungen und passen sich somit den durch die Differentialgleichungen beschriebenen Vorgängen am besten an. Da solche Partikulärlösungen nur kleine Gebiete mit jeweils wenigen Stützstellen in die Differenzenrechnung einbeziehen, werden sie von WOELK [18] als „Teilgebietslösungen“ bezeichnet. Der wesentliche Unterschied zwischen dem „gewöhnlichen Differenzenverfahren“ und der Teilgebietsmethode besteht darin, daß die Differenzengleichung beim „gewöhnlichen Differenzenverfahren“ rein formal, bei der „Teilgebietsmethode“ durch eine physikalisch begründete Teilgebietslösung aus der Differentialgleichung hervorgeht.

Wird die instationäre Energiegleichung für Wärmeleitung und Konvektion (9) durch das gewöhnliche Differenzenverfahren, also durch ein Interpolationspolynom, berechnet, so ergibt sich folgende Differenzengleichung:

$$\begin{aligned} \vartheta_{i,j,k+1} = \vartheta_{i,j,k} &+ \frac{a \cdot \Delta t}{\Delta x^2} \cdot \left\{ \left[1 - \frac{Pe \cdot \Delta \xi}{2} \right] \cdot \vartheta_{i+1,j,k} - 2 \cdot \vartheta_{i,j,k} \right. \\ &+ \left. \left[1 + \frac{Pe \cdot \Delta \xi}{2} \right] \cdot \vartheta_{i-1,j,k} \right\} \\ &+ \frac{a \cdot \Delta t}{\Delta y^2} \cdot \left\{ \left[1 - \frac{Pe \cdot \Delta \eta}{2} \right] \cdot \vartheta_{i,j+1,k} - 2 \cdot \vartheta_{i,j,k} \right. \\ &+ \left. \left[1 + \frac{Pe \cdot \Delta \eta}{2} \right] \cdot \vartheta_{i,j-1,k} \right\}. \end{aligned} \quad (35)$$

$Pe \cdot \Delta \xi$ und $Pe \cdot \Delta \eta$ sind hierbei Péclet-Zahlen, die mit Hilfe der Ortsschrittweiten Δx bzw. Δy gebildet werden:

$$Pe \cdot \Delta \xi = \frac{\rho \cdot c \cdot v_x \cdot H}{\lambda_{eff}} \cdot \frac{\Delta x}{H}, \quad (36)$$

$$Pe \cdot \Delta \eta = \frac{\rho \cdot c \cdot v_y \cdot H}{\lambda_{eff}} \cdot \frac{\Delta y}{H}. \quad (37)$$

Die Berechnung der Differenzengleichung (35) ist nur dann stabil, wenn gilt:

$$\frac{a \cdot \Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{4}, \quad (38)$$

$$\frac{a \cdot \Delta t}{\Delta y^2} \leq \frac{1}{4}. \quad (39)$$

Über diese Stabilitätsbedingungen hinaus, die bereits bei den reinen Wärmeleitungsproblemen gelten, müssen noch folgende zusätzlichen Bedingungen beachtet werden:

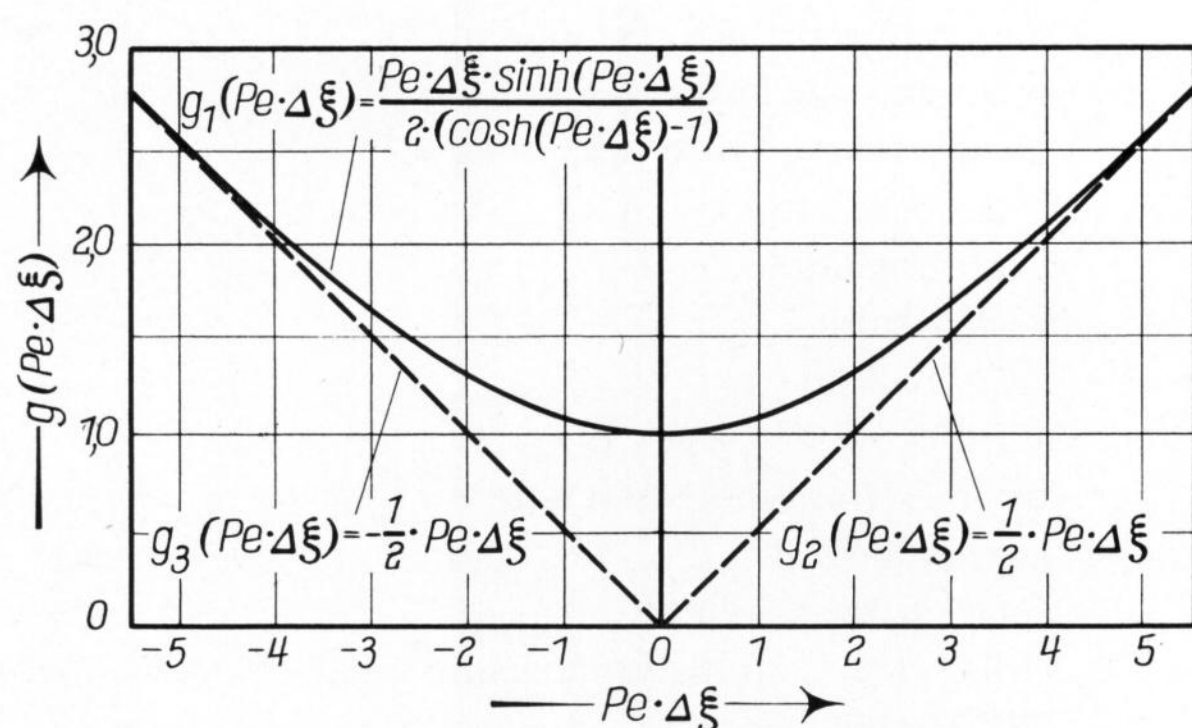
$$Pe \cdot \Delta \xi \leq 2, \quad (40)$$

$$Pe \cdot \Delta \eta \leq 2. \quad (41)$$

Werden die Gleichungen (40) und (41) nicht eingehalten, so wird die Rechnung instabil, weil das sogenannte Indexkriterium [15] nicht erfüllt ist. Da die für die Bestimmung der Glasströmung maßgeblichen Péclet-Zahlen $Pe \cdot \Delta \xi$ und $Pe \cdot \Delta \eta$ zum Teil sehr viel größer als zwei sind, ist die aus dem gewöhnlichen Differenzenverfahren entwickelte Gleichung (35) instabil und somit für die weitere Rechnung ungeeignet.

Diese Instabilität läßt sich beheben, indem die „upwind-difference“-Technik von GOSMAN, PUN, RUNCHAL u. a. [16] angewendet wird. Dieses Verfahren beruht auf dem Prinzip, die Richtung der Strömung so in die Differenzenrechnung einzubeziehen, daß nur die Temperatur der stromaufwärts liegenden Stützstellen die zu berechnende Temperatur beeinflussen kann. Der Einfluß der im Stützstellenkreuz weiter stromabwärts herrschenden Temperaturen wird hierbei immer vernachlässigt. Bei der „upwind-difference“-Technik ist das Indexkriterium [15] nur dann erfüllt, wenn der Zeitschritt Δt hinreichend klein gewählt wird. Der Zeitschritt ist hierbei nicht nur eine Funktion der Stoffwerte und der Ortsdiskretisierung, sondern hängt darüber hinaus noch von der Péclet-Zahl und somit von der Geschwindigkeit ab.

Die mit den „upwind-differences“ aufgestellte Differenzengleichung enthält den Sonderfall reiner Wärmeleitung. Den entgegengesetzten Grenzfall reiner Wärme-konvektion gibt sie jedoch nicht wieder. Nur bei hohen Péclet-Zahlen nähert sie sich der Grenzgleichung für reine Wärmekonvektion.

Bild 4. Hilfsfunktion $g_1(Pe \cdot \Delta \xi)$ für die Teilgebietsmethode.

Im allgemeinen vermag die „upwind-difference“-Technik nicht alle Kombinationsmöglichkeiten zwischen den Grenzfällen reiner Wärmeleitung und reiner Konvektion richtig wiederzugeben. Ein Grund für das Versagen des gewöhnlichen Differenzenverfahrens sowohl in einfacher Form als auch in Verbindung mit den „upwind-differences“ besteht darin, daß das Interpolationspolynom (zweiten Grades), das diesen Verfahren zugrunde gelegt wird, nicht zugleich Lösung der partiellen Differentialgleichung (9) für die Energie ist.

Da auch kein weiteres endliches Interpolationspolynom diese Differentialgleichung (9) erfüllt, ist nach WOELK [18] im Rahmen dieser Arbeit eine spezielle Interpolationsfunktion entwickelt worden, die eine Partikulärlösung der Gleichung (9) darstellt. Diese Partikulärlösung lautet:

$$\vartheta(x, y, t) = a_0 + a_1 \cdot (x - v_x \cdot t) + a_2 \cdot e^{\frac{\rho \cdot c \cdot v_x}{\lambda} \cdot x} + a_3 \cdot (y - v_y \cdot t) + a_4 \cdot e^{\frac{\rho \cdot c \cdot v_y}{\lambda} \cdot y} \quad (42)$$

Bestimmt man die Koeffizienten a_0 bis a_4 von Gleichung (42) aus den vorgegebenen Temperaturwerten an den Stützstellen, so ergibt sich folgende Differenzengleichung:

$$\begin{aligned} \vartheta_{i,j,k+1} = & \vartheta_{i,j,k} + \frac{a \cdot \Delta t}{\Delta x^2} \cdot \left\{ \left[g(Pe \cdot \Delta \xi) - \frac{Pe \cdot \Delta \xi}{2} \right] \cdot \vartheta_{i+1,j,k} - 2 \cdot g(Pe \cdot \Delta \xi) \cdot \vartheta_{i,j,k} \right. \\ & \left. + \left[g(Pe \cdot \Delta \xi) + \frac{Pe \cdot \Delta \xi}{2} \right] \cdot \vartheta_{i-1,j,k} \right\} \\ & + \frac{a \cdot \Delta t}{\Delta y^2} \cdot \left\{ \left[g(Pe \cdot \Delta \eta) - \frac{Pe \cdot \Delta \eta}{2} \right] \cdot \vartheta_{i,j+1,k} - 2 \cdot g(Pe \cdot \Delta \eta) \cdot \vartheta_{i,j,k} \right. \\ & \left. + \left[g(Pe \cdot \Delta \eta) + \frac{Pe \cdot \Delta \eta}{2} \right] \cdot \vartheta_{i,j-1,k} \right\}, \quad (43) \end{aligned}$$

$$g(Pe \cdot \Delta \xi) = \frac{Pe \cdot \Delta \xi \cdot \sinh(Pe \cdot \Delta \xi)}{2[\cosh(Pe \cdot \Delta \xi) - 1]}, \quad (44)$$

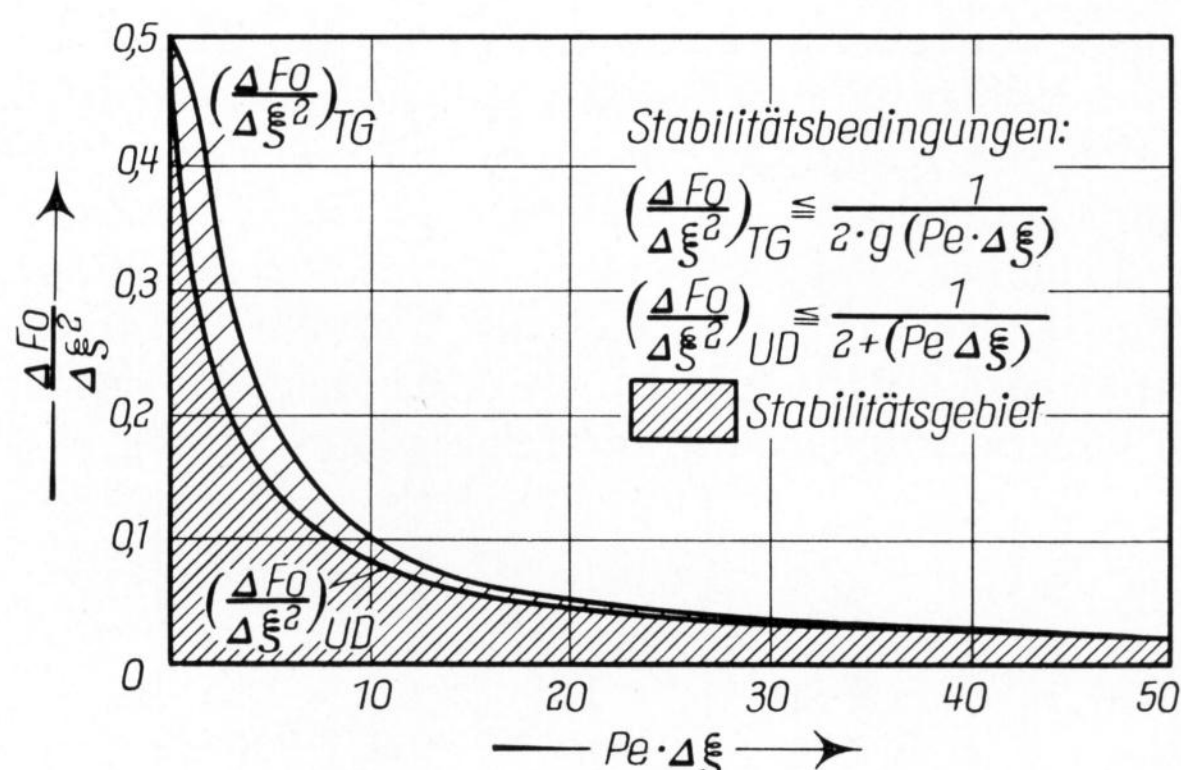


Bild 5. „Upwind-difference“-Technik (UD) und Teilgebietsmethode (TG).

$Pe \cdot \Delta \xi$ = Péclet-Zahl;

$\Delta Fo / \Delta \xi^2$ = Schrittweitenverhältnis.

$$g(Pe \cdot \Delta \eta) = \frac{Pe \cdot \Delta \eta \cdot \sinh(Pe \cdot \Delta \eta)}{2[\cosh(Pe \cdot \Delta \eta) - 1]}. \quad (45)$$

Die Funktionen $g(Pe \cdot \Delta \xi)$ und $g(Pe \cdot \Delta \eta)$ haben den in Bild 4 dargestellten Verlauf.

Da zur Berechnung der Gleichung (43) die Partikulärlösung der Energiegleichung nur auf das kleine Gebiet eines Stützstellenkreuzes angewandt worden ist, wird die Partikulärlösung auch „Teilgebietslösung“ [18] genannt. Die mit Hilfe der neuen Teilgebietslösung aufgestellte Differenzengleichung ist ebenso wie die Differenzengleichung, die mittels der „upwind-differences“ gebildet wird, nur dann stabil, wenn der Zeitschritt genügend klein gewählt wird. Bei der Teilgebietsmethode folgt der maximale Zeitschritt aus:

$$\Delta t \leq \frac{1}{2 \cdot \left\{ \frac{a}{\Delta x^2} \cdot g(Pe \cdot \Delta \xi) + \frac{a}{\Delta y^2} \cdot g(Pe \cdot \Delta \eta) \right\}}. \quad (46)$$

In Bild 5 ist die für den eindimensionalen Fall resultierende dimensionslose Abhängigkeit des Schrittweitenverhältnisses $\left(\frac{\Delta Fo}{\Delta \xi^2}\right)_{TG}$ von der Péclet-Zahl $Pe \cdot \Delta \xi$ dargestellt. Vergleicht man die durch die Teilgebietsmethode ermittelte Funktion $\left(\frac{\Delta Fo}{\Delta \xi^2}\right)_{TG}$ mit der nach der „upwind-difference“-Methode gefundenen Funktion $\left(\frac{\Delta Fo}{\Delta \xi^2}\right)_{UD}$, so stellt man fest, daß der größtmögliche Zeitschritt für hohe Péclet-Zahlen bei beiden Verfahren übereinstimmt. Sind die Péclet-Zahlen $Pe \cdot \Delta \xi$ jedoch kleiner als 40, so kann der Zeitschritt bei der Teilgebietsmethode zum Teil erheblich größer gewählt werden als bei der „upwind-difference“-Technik. Der prozentuale Unterschied zwischen diesen Fourier-Zahlen ist beispielsweise für $Pe \cdot \Delta \xi = 2$ größer als 52%. Dieser Vorteil kann zwar zur Berechnung der Schmelzeströmung nicht ausgenutzt werden, da die maximal vorkommenden Péclet-Zahlen etwa $Pe \cdot \Delta \xi = 200$ betragen und der größtmögliche Zeitschritt in diesem Bereich sich bei beiden Verfahren um lediglich 1% unterscheidet. Der genannte Vorteil beweist aber, daß die Teilgebietsmethode schon von der Theorie her grundsätzlich andere Ergebnisse erbringt als die bisher üblichen „upwind-differences“.

Ein weiterer entscheidender Vorteil der Teilgebietsmethode liegt darin begründet, daß sie beide Grenzfälle — den der reinen Wärmeleitung und den der reinen Wärmekonvektion — enthält. Streben die Péclet-Zahlen $Pe \cdot \Delta\xi$ und $Pe \cdot \Delta\eta$ gegen Null, so nehmen die Funktionen $g(Pe \cdot \Delta\xi)$ und $g(Pe \cdot \Delta\eta)$ beide den Wert eins an. In diesem Grenzfall hat Gleichung (43) die gleiche Form wie die Differenzengleichung für reine Wärmeleitung (47):

$$\vartheta_{i,j,k+1} = \vartheta_{i,j,k} + \frac{a \cdot \Delta t}{\Delta x^2} \cdot \left\{ \vartheta_{i+1,j,k} - 2 \cdot \vartheta_{i,j,k} + \vartheta_{i-1,j,k} \right\} + \frac{a \cdot \Delta t}{\Delta y^2} \cdot \left\{ \vartheta_{i,j+1,k} - 2 \cdot \vartheta_{i,j,k} + \vartheta_{i,j-1,k} \right\}. \quad (47)$$

Überschreiten die Péclet-Zahlen $Pe \cdot \Delta\xi$ und $Pe \cdot \Delta\eta$ den Wert 5, so unterscheiden sich $g(Pe \cdot \Delta\xi)$ und $g(Pe \cdot \Delta\eta)$ kaum noch von $\frac{Pe \cdot \Delta\xi}{2}$ bzw. $\frac{Pe \cdot \Delta\eta}{2}$ (Bild 4). In diesem Fall strebt Gleichung (43) gegen die Differenzengleichung (48) zur Berechnung der reinen Wärmekonvektion.

$$\vartheta_{i,j,k+1} = \vartheta_{i,j,k} + \frac{a \cdot \Delta t}{\Delta x^2} \cdot \left\{ \vartheta_{i-1,j,k} - \vartheta_{i,j,k} \right\} \cdot Pe \cdot \Delta\xi + \frac{a \cdot \Delta t}{\Delta y^2} \cdot \left\{ \vartheta_{i,j-1,k} - \vartheta_{i,j,k} \right\} \cdot Pe \cdot \Delta\eta, \quad (48)$$

$Pe \cdot \Delta\xi$ und $Pe \cdot \Delta\eta > 0$ vorausgesetzt.

Die Teilgebietsmethode (Gleichung (42)) bietet somit folgende Vorteile:

1. Sie ermöglicht eine stabile Berechnung, da das Indexkriterium für alle Péclet-Zahlen erfüllt ist, sofern der Zeitschritt Δt klein genug gewählt wird.
2. Im Bereich kleiner Péclet-Zahlen ($Pe \cdot \Delta\xi < 40$) kann ein größerer Zeitschritt gewählt werden als bei der „upwind-difference“-Methode.
3. Da die Interpolationsfunktion Partikulärlösung der Energiegleichung ist, gibt sie die physikalischen Transportvorgänge in einem durch ein Gitterkreuz begrenzten Elementargebiet („Teilgebiet“) besser wieder, als es die sonst üblichen Interpolationspolynome vermögen.
4. Sie erfaßt alle Kombinationsmöglichkeiten zwischen dem Grenzfall der reinen Wärmeleitung und dem der reinen Wärmekonvektion.

Gerade die unter Punkt 3. hier angeführte Eigenschaft der Interpolationsfunktion als Partikulärlösung, die sowohl für das Interpolationspolynom bei der Poissonschen Differentialgleichung als auch für die neue Interpolationsfunktion bei der Energiegleichung zutrifft, rechtfertigt die neue Bezeichnung „physikalisch begründete Interpolationsfunktion“.

4. Symbolsammlung

4.1. Formelzeichen und Einheiten

A	= Fläche in m ²
a	= Temperaturleitfähigkeit in m ² s ⁻¹
B	= Wannenbreite in m
C	= Konstante
c	= spezifische Wärmekapazität in W s kg ⁻¹ K ⁻¹
Fo	= Fourier-Zahl
Gr	= Grashof-Zahl
g	= Erdbeschleunigung in m s ⁻²
H	= Wannenhöhe in m
h	= Ortskoordinate für die Glasbadtiefe in m

k	= Wärmedurchgangszahl in W m ⁻² K ⁻¹
L	= Wannenlänge in m
$\dot{M}$	= Massenstrom, Durchsatz in kg s ⁻¹
$\dot{m}$	= Massenstromdichte in kg s ⁻¹ m ⁻²
n	= Brechungsindex
Pe	= Péclet-Zahl
Pr	= Prandtl-Zahl
$\dot{Q}$	= Wärmestrom in kW
$\dot{q}$	= Wärmestromdichte in kW m ⁻²
Ra	= Rayleigh-Zahl
S	= Schmelzbereich in m
SA	= Höhe der Durchlaßunterkante über dem Wannenboden in m
SE	= Höhe der Durchlaßoberkante über dem Wannenboden in m
s	= Ortskoordinate einer Stromlinie in m
T	= thermodynamische Temperatur in K
t	= Zeit in s
u	= spezifische innere Energie in W s kg ⁻¹
v	= Geschwindigkeit in m s ⁻¹
x	= Ortskoordinate für die Wannenlänge in m
y	= Ortskoordinate für die Wannenlänge in m
α	= Wärmeübergangskoeffizient in W m ⁻² K ⁻¹
β	= Wärmeausdehnungskoeffizient in K ⁻¹
ε	= Exponent in der Viskositätsfunktion
η	= dimensionslose Ortskoordinate in y-Richtung
Θ	= Transmissionsgrad
ϑ	= Temperatur in °C
κ	= Absorptionskoeffizient in m ⁻¹
λ	= Wärmeleitfähigkeit in W m ⁻¹ K ⁻¹
μ	= dynamische Viskosität in N s m ⁻²
ν	= kinematische Viskosität in m ² s ⁻¹
ξ	= dimensionslose Ortskoordinate in x-Richtung
ρ	= Dichte in kg m ⁻³
σ	= Strahlungskonstante, $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8}$ W m ⁻² K ⁻⁴
τ	= optische Dicke
Φ	= Spannungstensor in N m ⁻²
ψ	= Stromfunktion in m ² s ⁻¹
ω	= Rotation in s ⁻¹

4.2. Indizes

b	= Brennerraum
eff	= Effektivgröße
G	= Gemenge
i	= Anzahl der Stützstellen in x-Richtung
j	= Anzahl der Stützstellen in y-Richtung
k	= Anzahl der Zeitschritte
kr	= kritische Größe
Leit	= Wärmeleitungsgröße
l	= linke Wannenseite (Gemengeseite)
m	= Mittelwert
max	= Maximalwert
min	= Minimalwert
O	= Oberfläche des Schmelzbades
R	= Phasenänderung und chemische Reaktion
r	= rechte Wannenseite (Durchlaßseite)
S	= Schmelze
Str	= Strahlungsgröße
TG	= Teilgebietsmethode
UD	= „Upwind-difference“-Technik
u	= Wannenboden
x	= x-Richtung
y	= y-Richtung
zu	= Bereich der Schmelzzufuhr
ν	= spektrale Größe
0	= Bezugsgröße

5. Literatur

- [1] TRIER, W.: Zusammenhang zwischen Temperaturfeld und Strömungsfeld bei freier Konvektion in Glasschmelzen. *Glastechn. Ber.* **38** (1965) S. 282 – 292.
- [2] LENNERTZ, H. E.: Beitrag zur modellmäßigen Erfassung von Glasströmungsuntersuchungen in Glasschmelzwannen. TH Aachen, Diss. 1970.
- [3] SAFAIEH, M.: Glasströmungsuntersuchungen in einer Modellwanne. Teil 1 und 2. *Glastechn. Ber.* **41** (1968) S. 87 – 96, 129 – 137.
- [4] PESCHKE, J. v.: Berechnung von Konvektionsströmungen in Glasschmelzwannen. *Glastechn. Ber.* **38** (1965) S. 276 – 281.
- [5] WRIGHT, S. und RAWSON, H.: Calculation of natural convection in a rectangular cell containing glass with specified temperatures on the boundaries. *Glass Technol.* **14** (1973) Nr. 2, S. 42 – 49. [Ref. *Glastechn. Ber.* **47** (1974) Nr. 7, 74R0891.]
- [6] NOBLE, J. J.; CLOMBURG, L. A.; HOTTEL, H. C. u. a.: Mathematical and experimental modeling of the circulation patterns in glass melts. *Trans. ASME, Ser. C: J. Heat Transfer* **94** (1972) S. 149 – 154.
- [7] CHEN, T.-S. und GOODSON, R. E.: Computation of three-dimensional temperature and convective flow profiles for an electric glass furnace. *Glass Technol.* **13** (1972) S. 161 – 167.
- [8] SPIEGEL, E. A. und VERONIS, G.: On the Boussinesq approximation for a compressible fluid. *J. Astrophys.* (1960) S. 442 – 447.
- [9] BOUSSINESQ, J.: *Théorie analytique de la chaleur*. Vol. 2. Paris: Gauthier-Villars 1903.
- [10] ROSSELAND, S.: *Astrophysik auf atomtheoretischer Grundlage*. Berlin: Springer 1931. S. 41 – 44.
- [11] GENZEL, L.: Zur Berechnung der Strahlungsleitfähigkeit der Gläser. *Glastechn. Ber.* **26** (1953) S. 69 – 71.
- [12] KOHLER, M.: Einfluß der Strahlung auf den Wärmetransport durch eine Flüssigkeitsschicht. *Z. angew. Phys.* **18** (1965) S. 356 – 361.
- [13] VISKANTA, R. und GROSH, R. J.: Heat transfer by simultaneous conduction and radiation in an absorbing medium. *Trans. ASME, Ser. C: J. Heat Transfer* **84** (1962) S. 63 – 72.
- [14] CZERNY, M. und GENZEL, L.: Über die Eindringtiefe räumlich diffuser Strahlung in Glas. *Glastechn. Ber.* **25** (1952) S. 134 – 139.
- [15] KÖHNE, H.: Untersuchung, Vergleich und Fehlerabschätzung numerischer Verfahren zur Lösung der Wärmeleitungsgleichung. TH Aachen, Diss. 1967.
- [16] GOSMAN, A. D.; PUN, W. M.; RUNCHAL, A. K. u. a.: *Heat and mass transfer in recirculating flows*. London, New York: Academic Press 1969.
- [17] HATTON, A. P. und WOOLLEY, N. H.: Laminar combined natural and forced convection in a rectangular field. In: *Heat and mass transfer by combined forced and natural convection*. Inst. mechan. Engrs. 1972, S. 47 – 53.
- [18] WOELK, G.: Verbesserung von Differenzenverfahren durch Teilgebietslösungen. *Wärme- und Stoffübertragung* **7** (1974). (Im Druck.)

74R1516