

## Einfluß des Heizens auf die Strömung einer Glasschmelze in einem Konfusor oder Diffusor

Von Claus Mattheck\*), Paderborn, Matthias Coenen, Mainz, und Hans Grebner, Paderborn

(Mitteilung aus dem Fachbereich 10 (Technische Mechanik) der Gesamthochschule Paderborn  
und dem Jenaer Glaswerk Schott & Gen., Mainz)

(Eingegangen am 5. März 1980)

Es wird eine näherungsweise Lösung der Navier-Stokesschen Gleichung für die Strömung einer Glasschmelze in einem Trichter,

der am Rande beheizt wird, in Kugelkoordinaten angegeben.

### Influence of heating on the flow of molten glass in a confusor or a diffusor

The Navier-Stokes equation has been solved for a confusor and a diffusor. The velocity distribution of a real fluid heated at the bor-

der of the confusor (or diffusor) is given in spherical coordinates.

### L'influence du chauffage sur l'écoulement d'une fonte de verre dans un étranglement ou un évasement

On donne une solution approchée en coordonnées sphériques de l'équation de Navier-Stokes pour l'écoulement d'une fonte de verre

dans un entonnoir chauffé sur le bord.

#### 1. Einleitung

In früheren Arbeiten [1 und 2] wurde der Einfluß des Heizens auf die Strömung im zylindrischen Schlußstück eines Auslaufstutzens berechnet und die Dimensionierung des Stutzens gemäß der Kontinuitätsgleichung vorgenommen. Mit der Heizung dieses Schlußstückes wurde die Menge der pro Zeiteinheit auslaufenden Schmelze reguliert und – wie in [1 und 2] berechnet und experimentell nachgewiesen – eine homogenisierende Wirkung auf die Geschwindigkeitsverteilung erzielt.

Über diesem zylindrischen Schlußstück befindet sich

jedoch ein kreukskegelförmiger Trichter, dessen Rand sich durch die Heizung des darunter befindlichen Schlußstückes ebenfalls stark erwärmen wird, um nunmehr seinerseits das Geschwindigkeitsprofil der Schmelze im Trichter zu beeinflussen. Das Ziel der vorliegenden Untersuchung ist es, letztgenannten Einfluß rechnerisch abzuschätzen.

#### 2. Analysis

Die allgemeine Gleichung für die Strömung einer zähen Flüssigkeit ist nach [3] in kartesischen Koordinaten:

$$\rho \left[ \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right] = - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ \eta \left[ \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right] \right\} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \xi \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right) \quad (1)$$

mit  $i, k = 1, 2, 3$ . Über gleiche Indizes wird summiert. Dabei sind  $\rho$  die Massendichte,  $v_i$  die Geschwindigkeit,  $\eta$  und  $\xi$  die Zähigkeitskoeffizienten.

Für eine inkompressible Flüssigkeit wird im Falle stationärer Strömung gefunden:

$$\rho v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} = - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ \eta \left[ \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right] \right\} \quad (2)$$

oder ausdifferenziert

$$\rho v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} = - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \left[ \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right] \frac{\partial \eta}{\partial x_k} + \eta \left( \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_k \partial x_k} + \frac{\partial^2 v_k}{\partial x_i \partial x_k} \right), \quad (3)$$

wobei der letzte Term der rechten Seite wegen der Inkompressibilität verschwindet. Es bleibt

$$\rho v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} = - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \left[ \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right] \frac{\partial \eta}{\partial x_k} + \eta \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_k \partial x_k}. \quad (4)$$

Eine Abschätzung zeigt, daß der Term mit der Ortsableitung der Viskosität  $\eta$  bei Glasschmelzen in erster Näherung gegen den letzten Term der rechten Seite von Gleichung (4) vernachlässigt werden kann, d. h. es kann

\*) Jetzt: Kernforschungszentrum Karlsruhe.

mit der Navier-Stokesschen Gleichung

$$\rho v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} = - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \eta \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_k \partial x_k} \quad (5)$$

oder in Vektorschreibweise

$$\rho(\vec{v} \nabla) \vec{v} = - \nabla p + \eta \Delta \vec{v} \quad (6)$$

weitergerechnet werden. Im vorliegenden Fall kleiner Reynoldsscher Zahlen kann man die linke Seite von Gleichung (6) gegenüber dem zweiten Term der rechten Seite vernachlässigen. Die Reibung überwiegt. Es bleibt die zu lösende Gleichung

$$\eta \Delta \vec{v} = \nabla p. \quad (7)$$

Es ist günstig, in Kugelkoordinaten zu rechnen. Mit Gleichung (7) und  $|\vec{v}| = v_r(r, \theta) = v(r, \theta)$  folgt:

$$\eta \left[ \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{2v}{r^2} \right] = \frac{\partial p}{\partial r}; \quad (8)$$

$$\frac{2v}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} = \frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} \quad (9)$$

mit  $v = \eta/\rho$ ;

$$\frac{\partial p}{\partial \theta} = 0. \quad (10)$$

Die Kontinuitätsgleichung lautet:

$$\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{2v}{r} = 0. \quad (11)$$

Daraus folgt

$$v = f(\theta)/r^2. \quad (12)$$

$f(\theta)$  ist zu bestimmen mit den Gleichungen (8) bis (10) und den Randbedingungen

$$v(r, \theta = \alpha) = 0, \quad (\text{Haften am Rand}) \quad (13)$$

Beide Gleichungsseiten sind konstant, weil sie nur von je einer Variablen abhängen. Beiderseitiges Differenzieren

$$\eta(\theta) [f''(\theta) + \cot \theta f'(\theta)] + 6[\eta(\theta) f(\theta) - \int \eta'(\theta) f(\theta) d\theta] = W'(r) r^4 := C_1. \quad (16)$$

$S$  ist eine Konstante, die im Zusammenhang mit der Viskosität erklärt wird.

Entwickelt man hier die trigonometrischen Funktionen in Reihen, bricht diese nach den ersten Gliedern ab und löst die sich so ergebende Näherung für die Differentialgleichung (17) durch den Reihenansatz:

$$f'''(\theta) + f''(\theta) [S + \cot \theta] + f'(\theta) \left[ S \cot \theta - \frac{1}{\sin^2 \theta} + 6 \right] = 0. \quad (17)$$

$$f(\theta) = \theta^n \sum_{i=0}^{\infty} C_i \theta^i, \quad (18)$$

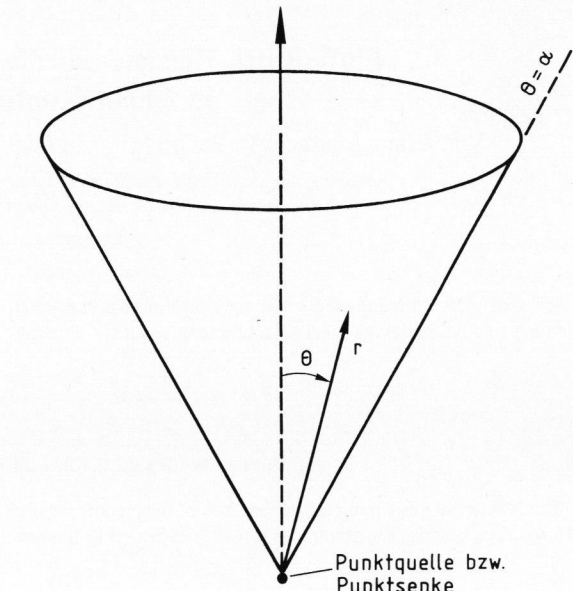


Bild 1. Skizze der Geometrie.

$$\int dA v(r, \theta) = Q \quad (\text{Durchflußmenge sei } Q). \quad (14)$$

$dA$  ist dabei ein Flächenelement des Trichterquerschnitts ( $r = \text{const.}$ ), über den integriert wird. Mit den Gleichungen (12), (9) und den später angegebenen Gesetzen für die Temperatur und die Temperaturabhängigkeit der Viskosität folgt nach kurzer Zwischenrechnung:

$W'(r)$  ist die nach  $r$  differenzierte Integrationskonstante, die bei einer Integration nach  $\theta$  auftritt und noch von  $r$  abhängen darf.

Wird Gleichung (15) in Gleichung (8) eingesetzt, so ergibt sich

nach  $\theta$  liefert die Gleichung für  $f(\theta)$ :

so folgt nach längerer, aber nicht prinzipiell schwieriger Rechnung, die hier übergangen werden soll, mit den Gleichungen (17), (18) und der Bestimmung der einen

Integrationskonstanten aus Gleichung (13) die Lösung für die Geschwindigkeitsverteilung in der Form:

$$v(r, \theta) = \frac{Q}{r^2 a_0} \left[ \frac{1}{2} (\theta^2 - \alpha^2) - \frac{2}{9} S (\theta^3 - \alpha^3) - \frac{1}{16} (3 - S^2) (\theta^4 - \alpha^4) + \right. \\ \left. + \frac{1}{75} (7S - S^3) (\theta^5 - \alpha^5) + \frac{1}{144} \left( \frac{9}{2} - \frac{23}{6} S^2 + \frac{1}{3} S^4 \right) (\theta^6 - \alpha^6) \right], \tag{19}$$

wobei  $a_0$  noch als zweite Integrationskonstante aus Gleichung (14) in der Form

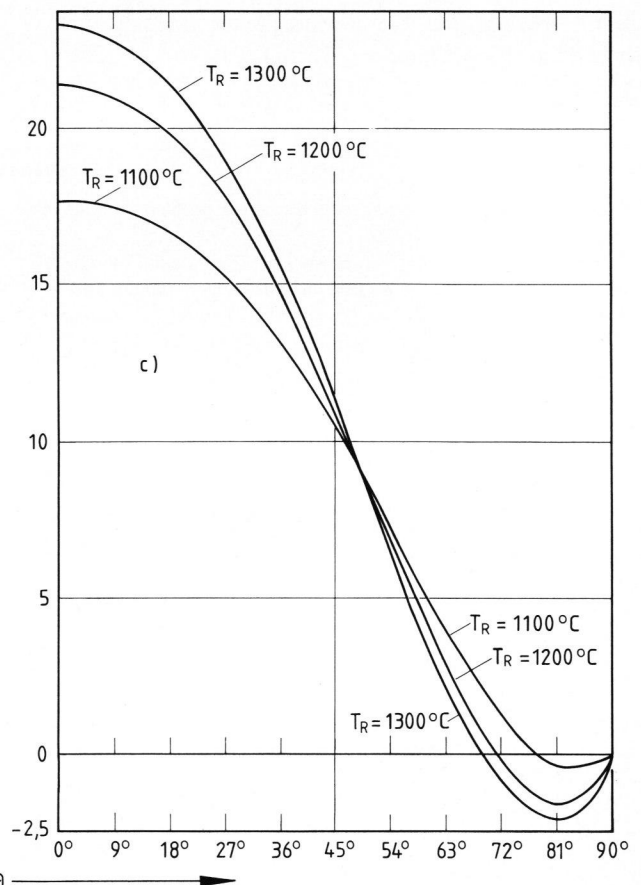
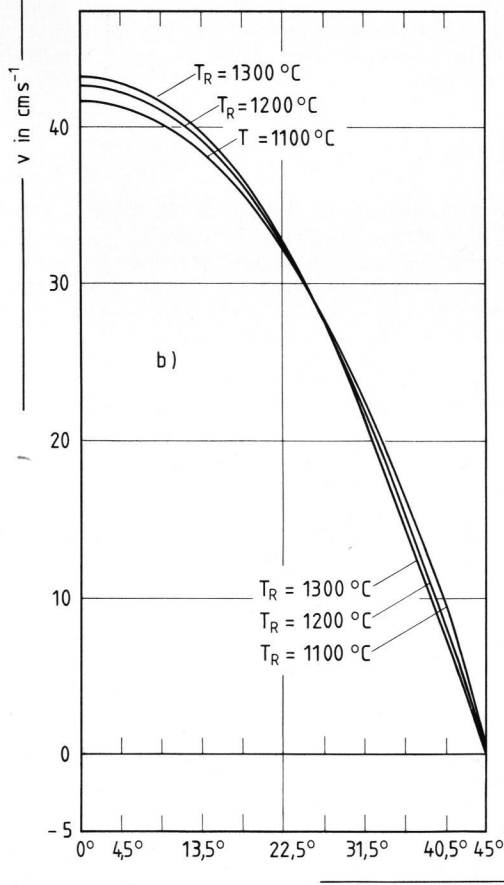
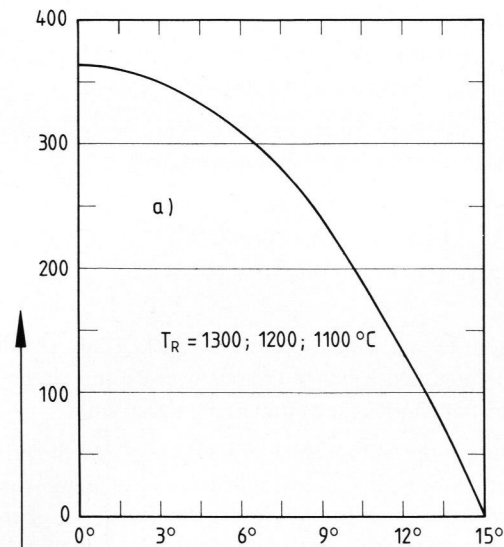
$$Q = 2\pi r^2 \int_0^\alpha v(r, \theta) \sin \theta \, d\theta \tag{20}$$

bestimmt wird. Der explizite Ausdruck für  $a_0$  soll seines Umfanges wegen hier nicht angegeben werden.

Für die Berechnungen wurde als Näherung eine Temperaturverteilung in der Form

$$T(\theta) = T_R + C(\theta - \alpha) \tag{21}$$

( $C = \text{const.}$ )



Bilder 2a bis c. Geschwindigkeitsverteilung in Abhängigkeit von  $\theta$ ; a) bei  $\alpha = 15^\circ$ ,  $r = 0,5$  cm; b) bei  $\alpha = 45^\circ$ ,  $r = 0,5$  cm; c) bei  $\alpha = 90^\circ$ ,  $r = 0,5$  cm.

als linear angenommen und die Temperaturabhängigkeit der Viskosität nach Vogel-Fulcher-Tamman

$$\eta(T) = A \exp [B/(T-T_0)] \quad (22)$$

durch

$$\eta(\Theta) = \eta_0 \exp [S\Theta] \quad (23)$$

genähert (wie in [1 und 2]), wobei gilt

$$\eta_0 = A \frac{B}{e^{T_R - T_0}} \cdot \frac{BC\alpha}{e^{(T_R - T_0)^2}} \quad (24)$$

Der Term S tritt in Gleichung (19) auf.

$$S = - \frac{BC}{(T_R - T_0)^2} \quad (25)$$

### 3. Ergebnisse und Diskussionen

Bild 1 zeigt die untersuchte Geometrie. Es spielt für die Form der Geschwindigkeitsverteilung keine Rolle, ob  $Q < 0$  oder  $Q > 0$ , ob es sich also um einen Diffusor oder Konfusor handelt. Dies wirkt sich lediglich im Vorzeichen der Geschwindigkeitsverteilung aus. Alle Geschwindigkeitsverteilungen wurden für  $r = 0,5$  cm berechnet. Die Resultate lassen sich leicht auf andere Radien umrechnen, weil  $v \sim r^{-2}$ .

Bild 2a zeigt die Geschwindigkeitsverteilung für einen Diffusor ( $Q > 0$ ) mit  $\alpha = 15^\circ$ ,  $Q = 10 \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1}$ . Die

Kurven fallen im Rahmen der Zeichengenauigkeit für alle drei Randtemperaturen praktisch zusammen. Der Heizeffekt ist also unwesentlich. In Bild 2b zeichnet sich für  $\alpha = 45^\circ$  schon ein beginnender Rückstau in der Nähe der Trichterwand ab, der sich mit zunehmender Randtemperatur als verlangsamte Strömung stärker bemerkbar macht.

Einen echten Rückstau im Sinne einer Gegenströmung zeigt Bild 2c für  $\alpha = 90^\circ$ . Die rückfließende Flüssigkeitsmenge wächst mit zunehmender Randtemperatur. Man beachte, daß dieser Effekt ohne Einbeziehung der Konvektion in die Rechnung zustande kommt, denn die Dichte wurde als konstant angenommen.

Für die Berechnungen wurde eine Modellschmelze mit folgenden Parametern zugrunde gelegt:

$$A = 10^{-3} \text{ Pa s}; \quad B = 11600 \text{ }^\circ\text{C}; \quad C = 100 \text{ }^\circ\text{C}; \\ T_0 = 200 \text{ }^\circ\text{C}; \quad Q = 10 \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1}.$$

Kritisch sei zu dieser Arbeit bemerkt, daß es allein darum ging, den Rückstau nachzuweisen und die Bedingungen für die Rückströmung einzugrenzen.

Wegen der vollzogenen Näherungen sind die numerischen Werte der Geschwindigkeit mit einem gewissen Fehler behaftet. Der prinzipielle Effekt wurde aber sicher in befriedigender Weise aufgezeigt.

Die Autoren danken Herrn cand. ing. Peter Morawietz für die Durchführung der numerischen und analytischen Rechendetails.

### 4. Literatur

- [1] Mattheck, C.: Linearisierung von Strömungsprofilen. Silikat-techn. **25** (1974) S. 384–385.
- [2] Rötger, H. und Mattheck, C.: Einfluß des Heizens auf die Dimensionierung des Auslaufes und das Strömungsprofil der ausfließenden Flüssigkeit. Silikat-techn. **26** (1975) S. 159–161. [Ref. Glastechn. Ber. **50** (1977) 77R0857.]
- [3] Landau, L. D. und Lifschitz, E. M.: Lehrbuch der theoretischen Physik. Band 6. Hydrodynamik. 2. Aufl. Berlin: Akademie-Verl. 1971. 80R1786