

Erlaubte Biegespannung in Glasbauteilen im Dauerlastfall

Ein Vorhersagekonzept aus dynamischen Labor-Festigkeitsmessungen

Von Gerhard Exner, Mainz

(Mitteilung aus den Schott Glaswerken, Mainz)

(Eingegangen am 22. September 1983)

Die Festigkeit von Gläsern und Glaskeramiken ist keine Materialkonstante im Sinne der Dichte, sondern hängt insbesondere ab vom mechanischen Bearbeitungszustand und von der Größe der zugbeanspruchten Oberfläche, von der erlaubten maximalen Ausfallwahrscheinlichkeit, dem zeitlichen Verlauf bzw. der Dauer der wirkenden Zugspannung sowie vom umgebenden Medium. Dies ist wichtig zur Beurteilung von Glasbauteilen, die mechanischen Belastungen ausgesetzt sind. Dafür wird ein Konzept angegeben. Während die Oberflächenqualität im Sinne der

Festigkeit mindestens einer Meßreihe im Labor bedarf, konnten für die Fläche, die Ausfallwahrscheinlichkeit und die Wirkung der Zeit Einflußfaktoren definiert werden. Für sie werden Realisierungsgleichungen mitgeteilt, die Gültigkeit haben für das Weibull-Modell mit zwei Parametern.

An einem Beispiel wird das Vorgehen ausführlich erläutert; Diagramme sollen die Vorstellungen erleichtern. Die theoretische Basis wird nachvollziehbar dargestellt, um die Anwendungsgrenzen beurteilen zu können.

Permissible bending stress in glass components under continuous loading A concept for predicting it from dynamic strength measurements in laboratory

The strength of glasses and glass ceramics is not an intrinsic property like density but depends especially on the mechanical condition of and tensile stress present in the surface, the maximum permissible probability of fracture, the time distribution of loading particularly the duration of the effective tensile stress, and the surrounding medium. A concept is proposed for dealing with the problem of evaluating the strength of intermittently loaded structural glass components. Whilst surface quality in relation to strength requires at least one of a series of measurements in the

laboratory, factors for the area, the probability of failure and the effect of time could be defined. Equations that permit this are reported and are valid for the Weibull model with two parameters.

An example is given to provide a detailed explanation of the foregoing; diagrams make the assumptions clear. The theoretical basis is being referred to in full so that the limits of application are able to be evaluated.

Contrainte de flexion permise dans des composants en verre soumis à des efforts permanents Comment on peut la prévoir à partir des mesures dynamiques de la résistance mécanique en laboratoire

La résistance mécanique des verres et des vitrocéramiques n'est pas une constante au sens où on l'entend pour la masse volumique, mais elle dépend en particulier de l'état du façonnage mécanique et de l'étendue de la surface soumise à la sollicitation, de la probabilité maximale de casse permise, de la variation dans le temps ou de l'effort exercé ainsi que du milieu environnant. Pour évaluer le comportement des composants en verre qui sont soumis à des efforts mécaniques, on précise une notion. Pour déterminer la qualité de la surface du point de vue de la résistance mécanique,

on a besoin au moins de toute une série de mesures en laboratoire; pour les surfaces, la probabilité de casse et l'effet du temps, on peut définir des facteurs d'influence pour lesquels on fournit des équations qui sont valables pour le modèle de Weibull à deux paramètres.

On prend un exemple pour expliquer en détail la démarche; des diagrammes apporteront les éclaircissements nécessaires. On représente la base théorique de telle sorte qu'on puisse évaluer les limites d'emploi.

1. Problemstellung

Bei der Konstruktion oder der Beurteilung von Glasbauteilen, die mechanischen Belastungen ausgesetzt sind, ist eine wichtige Frage die nach ihrer „Haltbarkeit“. Dabei existiert der Wunsch nach einer Voraussage, ohne den Aufwand der Herstellung von Mustern und deren Erprobung betreiben zu müssen. Es interessiert auch, welchen Anteil etwa die Geometrie des Teils, die Dauer der Belastung oder Forderungen der Bauteilzuverlässigkeit am Endergebnis haben.

Zur Beantwortung solcher Fragen soll hier ein Konzept wiedergegeben werden, das in vielen Fällen schnell zu einem Ergebnis führt, im Bedarfsfall aber

noch verfeinert werden kann. Der theoretische Hintergrund ist nachvollziehbar, was zur Beurteilung der Anwendungsgrenzen wichtig ist.

2. Übersicht, Aufteilung der Aufgabe in Einzelschritte

Es wird von einer konkreten Vorgabe ausgegangen (Bild 1a): Art der Belastung, Belastungszeit, Material usw. und der erlaubten Ausfallwahrscheinlichkeit (unbekannte Werte müssen als Annahmen eingesetzt werden). Das Ziel ist festzustellen, ob die Konstruktion hält, d. h. ob die zu erwartende Ausfallwahrscheinlichkeit \bar{F} gleich oder kleiner als

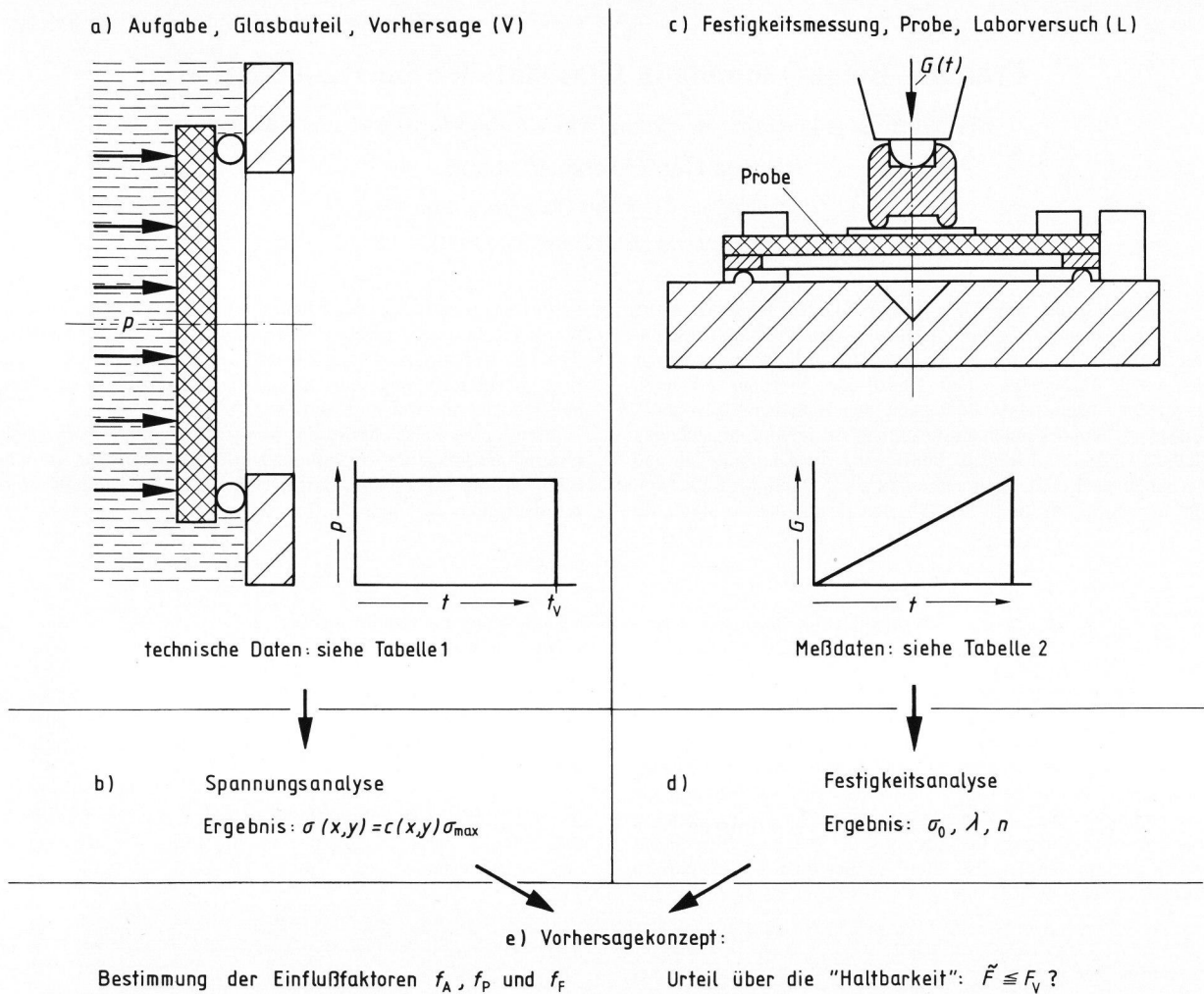


Bild 1. Zusammenspiel zwischen konstruktiver Aufgabe, zugeordneten Festigkeitsmessungen im Labor und der Vorhersagerechnung der Realisierbarkeit (siehe auch [1]).

die maximal erlaubte Ausfallwahrscheinlichkeit F_V ist.

a) Die erste zu lösende Teilaufgabe ist die Spannungsanalyse (Bild 1b): Aus Geometrie, Last usw. muß die Spannungsverteilung besonders an der Oberfläche des Bauteils berechnet werden.

b) Die zweite Teilaufgabe ist eine Festigkeitsanalyse (Bilder 1c und d). An Proben des gleichen Glases mit derselben Oberflächenbearbeitung bzw. -schädigung, wie sie im maximal belasteten Bereich des zu beurteilenden Glasteils herrscht, müssen Festigkeitsmessungen im Labor unter den gleichen Umgebungsbedingungen ausgeführt (Bild 1c) und ausgewertet (Bild 1d) werden.

c) Die dritte Teilaufgabe betrifft das Vorhersagekonzept (Bild 1e): Rechnungen sind erforderlich, um vom meist geometrisch kleinen und kurz belasteten Modell auf das große und länger belastete Bauteil schließen zu können.

2.1. Einzelheiten und Stand der Spannungsanalyse

Die erste Teilaufgabe, die Spannungsanalyse, beschäftigt die technische Mechanik schon seit langem. Mit ihrer Entwicklung haben sich Begriffe wie Elastizitätsmodul und Querkontraktion überhaupt erst gebildet [2]. Es gibt also eine Fülle von bereits gelösten Problemen, die in Nachschlagewerken [3 bis 5] übersichtlich geordnet sind. Bezieht man die „Methode der finiten Elemente“ ein, so könnte man zu der Auffassung kommen, daß heute jede Lösung der Spannungsanalyse nur eine Zeit- und Geldfrage ist. Daß dies nicht ganz zutrifft, beruht auf der Existenz von Dichtungen, undefiniert angezogenen Schrauben usw. Einige Umstände erleichtern aber die Analyse:

a) Da bei Glas und Glaskeramik die Schäden praktisch immer von der Oberfläche ausgehen, wird nur die Spannung $\sigma(x,y)$ an der Oberfläche benötigt (x und y seien Koordinaten zur Beschreibung der Oberfläche).

b) Die Spannung σ ist zwar ein Tensor (siehe in Bild 2 die beiden Hauptspannungen, die an jedem Punkt der Oberfläche x, y existieren), für das hier verfolgte Ziel kann sie als Skalar betrachtet werden, wenn jeweils die größere der in x, y auftretenden Zugspannungen ausgewählt wird.

c) Für das Vorhersagekonzept ist es ausreichend, wenn die Spannungsanalyse $\sigma(x, y)$ in der Umgebung des Maximalwertes σ_{\max} genauer ausgeführt ist. Es ist schwer, allgemein anzugeben, wie groß der Bereich sein muß. Um ein Beispiel zu nennen: der Bereich, in dem die Spannung größer als 80 % des Maximalwertes ist. Der Prozentwert hängt ab von der Oberflächenschädigung und den Genauigkeitsanforderungen der Voraussage.

2.2. Stand der Festigkeitsanalyse

Festigkeitsmessungen an Gläsern werden seit vielen Jahren ausgeführt. Leider muß aber ohne Übertreibung festgestellt werden, daß der großen Vielzahl der Untersuchungen (verschiedene Glastypen, unterschiedliche Verletzungsarten, umgebende Medien, Temperaturen usw.) nur wenige solide Messungen mit vollständigen Meßergebnissen gegenüberstehen.

Drei Gründe dafür sollen nachfolgend vorgestellt werden, um zur Förderung des Verständnisses beizutragen.

2.2.1. Methodische Schwierigkeiten

bei der Messung von Glasfestigkeitswerten

Die bisher bei der Messung von Glasfestigkeitswerten stets auftretenden methodischen Schwierigkeiten können erst in jüngster Zeit als überwunden gelten. Bei den vielbenutzten Drei- und Vierschneidenverfahren zur Festigkeitsmessung an Proben mit rechteckigem Querschnitt dürfen nur von den Proben Meßwerte benutzt werden, bei denen der Bruchausgang in der Fläche und nicht am Rand liegt. Es ist zwar unbestritten, daß gelegentlich die Festigkeitseigenschaften der Kante interessieren, zumeist ist aber die „Flächenfestigkeit“ gesucht. Die Fläche S_L gleichmäßiger maximaler Spannung ist bei diesen Proben nur beim Vierschneidenverfahren definiert. Nicht oder nur schwierig definierbar ist eine Meßfläche bei Proben mit kreisförmigem Querschnitt. Sie werden häufig benutzt, da es natürlich keine Kantenbrüche gibt.

Eine definierte Meßfläche S_L und dazu Problemlöslichkeit mit Kantenbrüchen garantiert nur das Doppelringverfahren [6]. Eine DIN-Vorschrift existiert erst seit 1983 [7]; nur in wenigen Labors wurde das Verfahren zuvor eingesetzt und noch weniger Messungen mit allen Nebenumständen veröffentlicht [8 bis 10]¹⁾.

¹⁾ In [9] ist Gleichung (1) wie folgt zu berichtigen:

$$\sigma_{BV}(\dot{\sigma}_V) = \sigma_{BL}(\dot{\sigma}_L) \left(\frac{\dot{\sigma}_V}{\dot{\sigma}_L} \right)^{1/(n+1)}$$

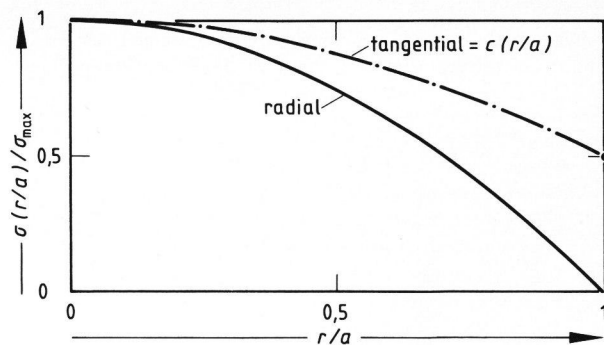


Bild 2. Spannungsverteilung an der Beobachtungsseite einer runden Fensterscheibe nach Bild 1a, die als nicht eingespannt anzusehen ist.

2.2.2. Schwierigkeiten bei der Probenvorbereitung

Der Aufwand zur Herstellung von Festigkeitsproben kann außerordentlich unterschiedlich sein (und demgemäß auch die Kosten pro Probe):

a) Bei Floatglas oder gezogenem Flachglas sind Proben für die Doppelringanordnung, was die Geometrie betrifft, leicht herstellbar.

b) Wird dagegen von Blockglas ausgegangen, muß Scheibe um Scheibe abgesägt werden. Der Sägeschnitt erfährt je nach Meßziel noch weitere Schleif- und Polierbearbeitungen.

Kritik ist im Fall a) angebracht, wenn eine künstliche Nachbeschädigung²⁾ unterbleibt, obwohl Festigkeitsmessungen für Probleme benutzt werden, bei denen im Laufe der Einsatzdauer Verletzungen durch Kratzer usw. nicht auszuschließen sind.

Im Fall b) ist für das Festigkeitsverhalten letztlich nicht das Aussehen der zugbeanspruchten Proben-seite – beispielsweise einwandfrei poliert – entscheidend, sondern noch aus den letzten Bearbeitungsschritten existierende Risse. In [7] (siehe hierzu auch Tabelle 2, Absatz b) ist angegeben, in welcher Form ein Oberflächenzustand beschrieben werden kann.

Bereits in [11] war die Forderung ausgesprochen worden, die Oberfläche der Glasproben im Labor so zu schädigen, wie sie beim späteren Einsatz im Laufe der Lebensdauer ohnehin verletzt werden: Messungen an nicht vorverletzten Laborproben haben nur in Sonderfällen Bedeutung.

In Mängeln bei der Probenauswahl und -beschreibung liegen also weitere Ursachen dafür, daß ein hoher Prozentsatz von Festigkeitsmessungen nur beschränkten Wert hat.

2.2.3. Unsicherheit bei der Auswertung der Laborfestigkeitsmessungen

In [7] wird nur vorgeschrieben, wie zu einer Glasprobe i die zugehörige Biegefestigkeit σ_{bBi} ermittelt wird. Ein Mittelwert soll nicht angegeben

²⁾ Beispiel für Nachbeschädigung siehe [9; Tabelle 2, Punkt b)] und [10].

Tabelle 1. Beispiel für das zu beurteilende Bauteil, ein rundes Unterwasserfenster nach Bild 1a, wobei die Beobachtung von der Luftseite aus erfolgt

a)	Glas: Schott BK 7 Poisson-Zahl $\mu = 0,208$
b)	Oberflächenzustand der zugbelasteten Seite: gleich oder besser als nach Behandlung mit 600er losem SiC-Schmirgel (Korngröße 8,3 bis 10,3 μm)
c)	Eigenspannung: nicht vorgespannt
d)	Geometrie: Durchmesser: $D = 2a = 18 \text{ cm}$ Dicke: $\delta = 3 \text{ cm}$ Auflage: als frei zu betrachten
e)	umgebendes Medium der Zugseite: trockenes Raumklima, Raumtemperatur
f)	Belastung: Wasserdruck: $p = 10 \text{ bar} = 10^6 \text{ Pa}$ Zeitdauer: $t_v = 1 \text{ Jahr}$
g)	Beobachter: Fernsehkamera
h)	Zuverlässigkeit: Aus den Angaben a) bis f) kann und soll die sich ergebende Bruchwahrscheinlichkeit \hat{F} abgeschätzt werden. Gewünscht ist ein Wert $F_v \leq 0,1 \% = 0,001$ der Bruchwahrscheinlichkeit. Nötigenfalls sind Änderungsvorschläge für a) bis d) zu unterbreiten.

werden, da er erfahrungsgemäß leicht zu falschen Schlüssen führt. Diskussionen über Regeln der statistischen Auswertung sind aber im Gange³⁾.

Obwohl bei der Keramik die Problematik des Bruchausganges anders liegt als beim Glas – Glasbrüche gehen fast immer von den Oberflächen aus, bei der Keramik dominiert die Volumenempfindlichkeit –, konnten wertvolle Gedanken der Keramiker übernommen werden [12 und 13]. Sie mögen helfen, die Verwendung der Gauß-Verteilung bei der Glasfestigkeit zu überwinden und die Weibull-Statistik als die angemessenere und einfachere zu verbreiten. Nach Möglichkeit sollte in dieser Zeit des Überganges nicht davor zurückgeschreckt werden, alle Einzelwerte zu veröffentlichen, damit jeder Interessent seine Schlüsse ziehen kann. Die Arbeiten haben auch noch später Bedeutung, wenn die Auswertemathe-matik an kleinen Probenzahlen (mit der schwierigen Abschätzung der Unsicherheiten) weiter entwickelt und verbreitet ist.

Besonders bei der Beurteilung von Mischverteilungen gibt es unterschiedliche Auffassungen. Sie sind nur zu vereinheitlichen, wenn Meßziel und Auswertung kombiniert werden⁴⁾.

³⁾ Die Ergebnisse sollen in Teil 3 der Norm DIN 52 292 veröffentlicht werden.

⁴⁾ Wer z. B. Glas zerkleinern will, interessiert sich mehr für die widerstandsfähigsten Stücke, d. h., für die Maximalwerte der Festigkeit.

2.3. Vorhersagekonzepte

Bruchmechanische Vorhersagen (z. B. [14]) erfordern Kenntnisse über Lage, Form und Tiefe der Anfangsrisse am Bauteil, die nur in Ausnahmefällen beim heutigen Stand der Technik zu erhalten sind. Als Denkmodell haben sie eine große Bedeutung. Wird dagegen als Hilfsmittel zur Voraussage die Labor-Festigkeitsmessung eingesetzt, kann bei quasistatischen Biegezugbeanspruchungen eine gute Voraussage auch bei zerkratzten, verwitterten oder perfekt polierten Oberflächen gemacht werden [9, 11, 15 und 16].

Beim Entwurf von Vorhersagekonzepten sollte im Interesse einer praktischen Bewährung an folgenden Merkmale gedacht werden:

- Erkennbarkeit der verwendeten physikalischen und mathematischen Beziehungen bzw. Voraussetzungen.
- Unkomplizierte Anwendung durch – soweit es möglich ist – Aufspaltung in Einflußfaktoren, die auch allein Anschaulichkeit und Bedeutung haben.
- Anweisungen zum Handeln in Fällen, bei denen nicht alle Daten verfügbar sind, (dann meist allerdings mit geringerer Vorhersagegenauigkeit).
- Anweisung zum Handeln, wenn Abweichungen vom Basisfall auftreten.
- Vollständigkeit der Einflüsse.

Diesen Bedingungen wird jetzt das implizit in [9, Abschnitt 7.] enthaltene Verfahren unterworfen.

Um dabei eine Vorstellung zu fixieren, wird von einem Beispiel ausgegangen (Tabelle 1). Dafür werden eine Spannungsanalyse (siehe Abschnitt 3.) und die Festigkeitsanalyse (siehe Abschnitt 4.) ausgeführt. Dann werden ohne Herleitung – also gleichsam axiomatisch – drei Einflußfaktoren eingeführt und jeweils auf das Beispiel (der Tabelle 1) angewendet (siehe Abschnitt 5.). Deren Produkt vermittelt zwischen einem dynamisch gemessenen Laborfestigkeitskennwert σ_0 zur maximal erlaubten statischen Spannung $\sigma_k(\dots)$ unter Berücksichtigung aller Parameter des Laborversuchs und der Aufgabenstellung (Abschnitt 5.4.). Der Vergleich von $\sigma_k(\dots)$ mit dem Maximalwert σ_{\max} der Spannungsanalyse entscheidet dann, ob die Konstruktion angenommen werden kann oder zu ändern ist.

Erst in Abschnitt 5.4.4. wird gezeigt, daß die axiomatisch eingeführten Einflußfaktoren mit den Beziehungen in [9] übereinstimmen.

3. Spannungsanalyse zum Bauteil aus Tabelle 1

Es interessiert nur die Biegespannung an der zugbelasteten Beobachtungsseite. Der Rand der kreisförmigen Platte ist als drehbar gelagert zu betrachten. Formeln findet man etwa in [3 bis 5].

Für die Tangentialspannung σ_t gilt mit der Gesamtlast W (Bild 1a)

$$W = p \pi a^2 \tag{1}$$

$$\sigma_t(r) = \frac{3W}{8\pi\delta^2} \left[(3 + \mu) - (1 + 3\mu) \left(\frac{r}{a}\right)^2 \right], \tag{2}$$

d. h. die Maximalspannung (im Zentrum $r = 0$)

$$\sigma_{\max} = \frac{3p a^2}{8\delta^2} (3 + \mu) \tag{3}$$

(mit $\mu = 0,208$ folgt $\sigma_{\max} = 1,20 \frac{p a^2}{\delta^2}$).

Aus den Gleichungen (2 und 3) folgt

$$\sigma_t(r) = \sigma_{\max} \left[1 - \frac{(1 + 3\mu)}{(3 + \mu)} \left(\frac{r}{a}\right)^2 \right]. \tag{4}$$

Für die radiale Spannung gilt

$$\sigma_r(r) = \sigma_{\max} \left[1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2 \right]. \tag{5}$$

Sie ist außer in der Mitte stets kleiner als die tangentielle Spannung. In Bild 2 ist die Spannungsverteilung skizziert.

Für das Beispiel (Tabelle 1) folgt aus Gleichung (3): $\sigma_{\max} = 10,8 \text{ N/mm}^2$ ($\cong 108 \text{ bar} \cong 1,08 \cdot 10^7 \text{ Pa}$).

4. Festigkeitsmessungen zum Bauteil aus Tabelle 1

4.1. Weibull-Modell

Die Festigkeitsmessungen im Labor ergaben die in Tabelle 2 zusammengestellten Meßergebnisse. Zur Auswertung wurde eine Skizze der Meßwerte angefertigt (Bild 3), wobei Weibull-Papier zur Anwendung gelangte. Die Gerade ist durch Ausgleichsrechnung bestimmt worden. Ihre Gleichung lautet⁵⁾:

$$F(\sigma_B) = 1 - \exp \left[- \left(\frac{\sigma_B}{\sigma_0} \right)^\lambda \right] = 1 - \exp \left[- \left(\frac{\sigma_B}{79,7} \right)^{8,7} \right]. \tag{6}$$

Daraus ergibt sich:
 charakteristische Festigkeit $\sigma_0 = 79,7 \text{ N/mm}^2$
 Weibull-Steigung $\lambda = 8,7$
 gleichmäßig beanspruchte Fläche⁶⁾ $S_L = 63,6 \text{ mm}^2$
 Anstiegsrate⁷⁾ $R = \dot{\sigma}_1 = 2 \text{ N/mm}^2$

Es fehlt noch der Widerstandswert der Spannungsrißkorrosion n . Um ihn zu messen, wäre mindestens

⁵⁾ Siehe auch Gleichung (4) in [9]: σ_B sei hier der Zahlenwert in N/mm^2 .

⁶⁾ Berechnet mit dem Stützringradius 22,5 mm (Tabelle 2).

⁷⁾ Entnommen aus Tabelle 2.

Tabelle 2. Prüfbericht einer Biegefestigkeitsmessung nach [7]

- a) Herkunft und Bezeichnung des Glases: Schott BK 7
- b) Vorbehandlung und Oberflächenzustand:
 Ausgehend von optisch feingekühltem Blockglas wurden Scheiben mit einer Dicke von 8,5 mm abgesägt. Die (später) druckbelastete Seite wurde mit 230er Schmirgel (\cong Korngröße 50 bis 56 μm) auf 5,3 mm Dicke abgearbeitet.
 Die für die Messung der maximalen Biegezugspannung vorgesehene Seite wurde nach folgender Schleifvorschrift bearbeitet:

Bezeichnung des SiC-Schmirgels	Korngröße in μm	Mindestabtrag in mm
100er	125 bis 149	1,5
230er	50 bis 56	0,4
500er	11,8 bis 13,8	0,3
600er	8,3 bis 10,3	0,1

Probendurchmesser: 46 mm
 Kurzbeschreibung des Oberflächenzustandes: 600er Schmirgel, loses Korn.
 Lagerung: einige Tage im Labor an Luft vor Meßbeginn.
 Eigenspannung: keine

- c) Eigenspannung: keine
- d) Meßverfahren: Doppelring-Verfahren; Stützringradius: 22,5 mm; Lastringradius: 4,5 mm, d.h. Ringradius-Verhältnis 5 : 1
 (Diese Maße sind nach [7] eigentlich nicht vorgesehen. Das Verfahren würde sinngemäß mit R 22,5 zu bezeichnen sein.)

e) umgebendes Medium: trocken, Raumklima
 f) Biegefestigkeiten σ_{bBi} (in N/mm^2) bei einer Anstiegs geschwindigkeit der Biegespannung $\dot{\sigma}_b = 2 \text{ N/(mm}^2 \text{ s)}$:

Rang	Meßwert	Rang	Meßwert
1	59,5	6	78,8
2	65,4	7	80,4
3	67,8	8	83,9
4	69,2	9	85,8
5	76,8	10	86,0

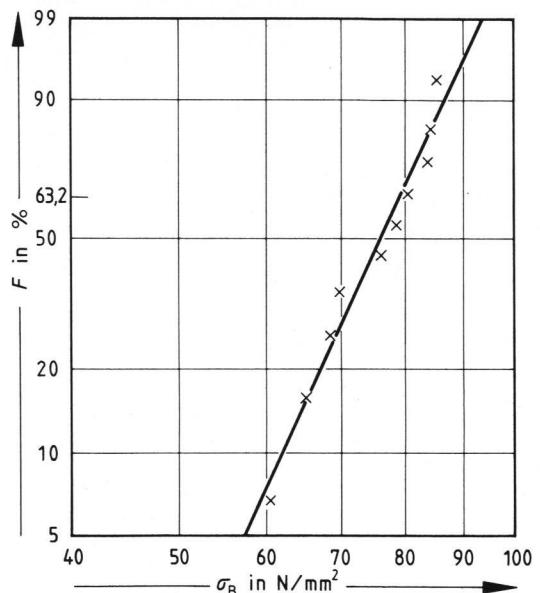


Bild 3. Weibull-Darstellung der Meßwerte nach Tabelle 2.

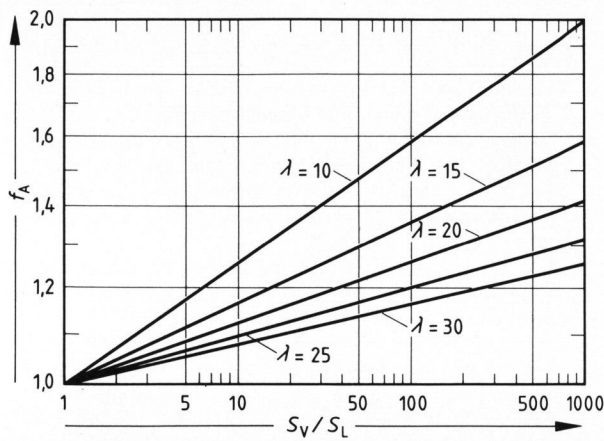


Bild 4. Flächenfaktor f_A in Abhängigkeit vom Flächenverhältnis Vorhersagefläche zur Fläche bei der Labormessung mit dem Parameter Weibull-Exponent λ .

– wie in [9] – noch eine zweite Festigkeitsmeßreihe bei einer anderen Spannungsrate $\dot{\sigma}_2$ erforderlich gewesen. Man kann sich aber auch mit einer Korrelationsüberlegung nach [17] behelfen. Dort wird behauptet:

$$n = 38 - 2,6 \alpha, \tag{7}$$

wobei α in 10^{-6} K^{-1} angegeben wird. Mit $\alpha_{BK7} (-30 \text{ bis } 70 \text{ }^\circ\text{C}) = 7,1 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$ ergibt dies $n = 20$.

4.2. Anwendung des Vorhersagekonzeptes beim Fehlen einer Weibull-Verteilung der Meßwerte

Können die Meßergebnisse nicht in die Form der Gleichung (6) gebracht werden, werden folgende Schätzwerte empfohlen:

a) Für σ_0 nehme man einfach den Mittelwert $\overline{\sigma_{bBi}}$.

b) λ kann geschätzt werden mit der Gleichung

$$\lambda = \frac{4,61}{\ln \frac{\sigma_B(63\%)}{\sigma_B(1\%)}}. \tag{8}$$

Hierin bedeuten: $\sigma_B(63\%)$ die Festigkeit bei 63 % Ausfall; $\sigma_B(1\%)$ die Festigkeit bei 1 % Ausfall; In den natürlichen Logarithmus.

c) λ kann auch etwas unsicherer geschätzt werden mit Hilfe der Standardabweichung s über

$$\lambda = 1,18 \overline{\sigma_{bBi}}/s. \tag{9}$$

d) Wenn jetzt λ bekannt ist, könnte die Schätzung von σ_0 nach a) mittels Gammafunktion Γ noch verbessert werden:

$$\sigma_0 = \frac{\overline{\sigma_{bBi}}}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{\lambda}\right)}. \tag{10}$$

Beispielweise ist für $\lambda = 10$, $\Gamma(1,1) = 0,951$ und für $\lambda = 20$, $\Gamma(1,05) = 0,974$.

5. Definition der Einflußfaktoren f_A, f_P, f_F und Berechnung der maximal zulässigen Spannung $\sigma_k(\dots)$

Die Berechnung der maximal zulässigen Spannung $\sigma_k(\dots)$ erfolgt in drei Schritten:

- a) Ausgehend vom Laborfestigkeitswert (Fläche S_L) wird auf die Festigkeit geschlossen, wenn die Fläche S_V beträgt.
- b) Es wird die Festigkeit bei der Ausfallwahrscheinlichkeit 63 % (siehe Definition der charakteristischen Festigkeit) auf die kleinere der Vorhersage F_V umgerechnet.
- c) Von der dynamischen Biegebeanspruchung im Laborversuch wird auf die statische Biegebeanspruchung während der geforderten Lastzeit t_V geschlossen.

Zu jedem Schritt gibt es die Definition eines „Faktors“ und getrennt dazu einen Realisierungsvorschlag, um ihn zu berechnen⁸⁾.

5.1. Flächenfaktor f_A (Area factor)

5.1.1. Definition und Anwendung

Der Flächenfaktor f_A ist das Verhältnis der charakteristischen Festigkeit σ_0 der Proben im Labor mit der gleichmäßig beanspruchten Oberfläche S_L zur charakteristischen Festigkeit des Bauteils mit der Vorhersagefläche S_V unter sonst gleichen Umständen.

Diese Definition kann in der Form einer Gleichung geschrieben werden:

$$f_A = \sigma_0(S_L, 63\%, R) / \sigma_0(S_V, 63\%, R). \tag{11}$$

Die Definition des Faktors f_A (und auch der beiden folgenden f_P und f_F) ist also ganz allgemein gehalten. Es gibt dazu folgende Realisierung bei homogener Beanspruchung der Flächen⁸⁾:

$$f_A = (S_V/S_L)^{1/\lambda}. \tag{12}$$

Eine unkritische Anwendung auf das Beispiel ergibt: Aus 18 cm Fensterdurchmesser folgt $S_V = 254 \text{ cm}^2$. Mit der Meßfläche $S_L = 0,64 \text{ cm}^2$ und dem Weibull-Parameter $\lambda = 8,7$ folgt

$$f_A = \left(\frac{254}{0,64}\right)^{1/8,7} = 1,99;$$

siehe hierzu auch Bild 4.

Aus Gleichung (11) folgt, daß durch die Vergrößerung der beanspruchten Fläche statt des Laborwertes $\sigma_0(S_L) = 80 \text{ N/mm}^2$ am Bauteil nur mit $\sigma_0(S_V) = 40 \text{ N/mm}^2$ gerechnet werden darf, da das

⁸⁾ Während die Definition „verteilungsfrei“ ist, hängt die Realisierung vom benutzten statistischen Modell ab. In der vorliegenden Arbeit ist es die Weibull-Verteilung mit zwei Parametern.

Bauteil größer ist und sich demgemäß die Wahrscheinlichkeit eines wirksamen Fehlers erhöht. Dem muß mit einer Verkleinerung der Spannung Rechnung getragen werden, um den gleichen Ausfall – 63 % – zu halten.

5.1.2. Flächenfaktor f_A
bei ungleichmäßig belasteten Flächen

Bei der Berechnung von $f_A = 1,99$ (Abschnitt 5.1.1.) wurde vereinfachend davon ausgegangen, die gesamte Vorhersagefläche S_V sei gleichmäßig mit σ_{max} beansprucht. Nun geht aus Bild 2 hervor, daß wegen der kleineren Spannungen im Randbereich dort ein Schaden unwahrscheinlich ist. S_V wird also zu groß eingesetzt, womit f_A ebenfalls zu groß wird. Dies soll jetzt durch Einführen der effektiven Fläche $S_{eff, v}$ behoben werden.

In einem ersten Schritt werden in der Spannungsverteilung $\sigma(x,y)$ der Maximalwert der Zugspannung gesucht⁹⁾ und eine Verteilungsfunktion der Spannung $c(x,y)$ eingeführt:

$$\begin{cases} c(x,y) = \sigma(x,y)/\sigma_{max} & \text{für } \sigma(x,y) \geq 0 \\ c(x,y) = 0 & \text{für } \sigma(x,y) < 0 \end{cases}; \quad (13)$$

$c(x,y)$ ist also dimensionslos, und es gilt $0 \leq c \leq 1$.

Im zweiten Schritt wird definiert [18]

$$S_{eff, v} = \iint_{S_V} [c(x,y)]^\lambda dx dy. \quad (14)$$

Eine verbesserte Realisierungsgleichung des Flächenfaktors f_A (im dritten Schritt) muß den allgemeinen Fall berücksichtigen, daß auch die Meßfläche S_L gegebenenfalls nicht homogen beansprucht ist [6] und hat zu lauten:

$$f_A = \left(\frac{S_{eff, v}}{S_{eff, L}} \right)^{1/\lambda}. \quad (15)$$

Der Ersatz der unkritischen Anwendung von Gleichung (12) in Abschnitt 5.1.1. soll das Verständnis vertiefen:

Zuerst wird $c(x,y)$ gesucht: Aus Gleichung (4) folgt mit $\mu = 0,2$ in Polarkoordinaten (r,φ)

$$c(r) = 1 - \frac{1}{2} (r/a)^2; \quad (16)$$

(siehe auch Bild 2). Damit ergibt sich für das Integral [5]:

$$S_{eff, v} = \int_0^{r=9 \text{ cm}} \int_0^{2\pi} \left[1 - \frac{1}{2} (r/a)^2 \right]^8 r dr d\varphi = L(\lambda, \dots) S_V. \quad (17)$$

⁹⁾ Wenn $\sigma_t \neq \sigma_r$, dann kann zur Vereinfachung der größere Wert gewählt werden, da eine sinnvolle Mittelung nur Komplikationen, aber wenig Nutzen bringt [16].

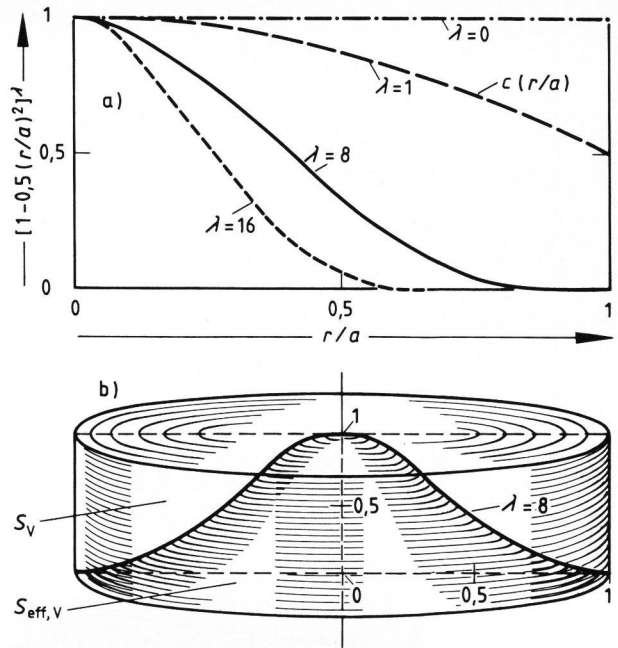


Bild 5. Zum geometrischen Lastverteilungsfaktor $L(\lambda, \dots)$. Da $S_{eff, v}$ für $\lambda = 8$ nach Gleichung (17) proportional dem Volumen unter der Funktion $c(r/a)^8$ ist, nachdem sie um die Ordinate gedreht wurde, und S_V analog durch das Volumen $c^0 = 1$, einen Zylinder, dargestellt wird, ist $L(8, \dots)$ das Verhältnis beider Volumina. Es ist zu erkennen, daß $L(\lambda, \dots)$ mit steigendem Weibull-Exponenten λ kleiner wird.

Bewußt wurde für den Weibull-Exponenten λ nicht 8,7, sondern die nächstgelegene kleinere ganze Zahl gewählt, um elementar integrieren zu können. Man erhält $S_{eff, v} = 55,9 \text{ cm}^2$. Ferner wurde ein u. a. von λ abhängender Faktor $L(\lambda, \dots)$ eingeführt, den man Lastverteilungsfaktor nennen kann. Da $S_V = 254 \text{ cm}^2$ ist, ergibt sich für ihn $L(\lambda = 8) = 0,22$. Seine Bedeutung hier: 22 % der geometrischen Fensterfläche S_V , homogen mit der Maximalspannung beaufschlagt, haben die gleiche Ausfallwahrscheinlichkeit zur Folge wie die reale Spannungsverteilung $\sigma(x,y)$ über die gesamte Fensterfläche.

Als dritter Schritt wird schließlich die Berechnung durchgeführt, die zeigt, welche Verbesserung sich für die Vorhersage ergibt. Nach den Gleichungen (15 und 17) folgt:

$$f_A = (L(\lambda, \dots) \cdot S_V/S_L)^{1/\lambda} = (0,22 \cdot 254/0,64)^{1/8,7} = 1,67.$$

Damit folgt aus Gleichung (11) die charakteristische Festigkeit der verbesserten Vorhersage:

$$\sigma_0(S_V, \dots) = \sigma_0/f_A = 80 \text{ N/mm}^2/1,67 = 48 \text{ N/mm}^2.$$

In diesem Fall wirkt sich die verfeinerte Rechnung so aus, daß man begründet dem Bauteil 20 % mehr Last zumuten kann.

Bei der Arbeit an einer Vorhersage ist es also sinnvoll, das mühsame Berechnen des Lastvertei-

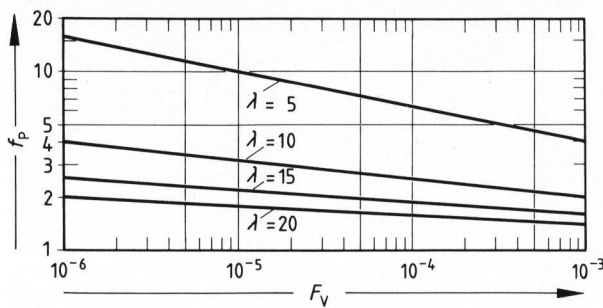


Bild 6. Wahrscheinlichkeitsfaktor f_P in Abhängigkeit von der maximal erlaubten Ausfallwahrscheinlichkeit F_V mit dem Parameter Weibull-Exponent λ .

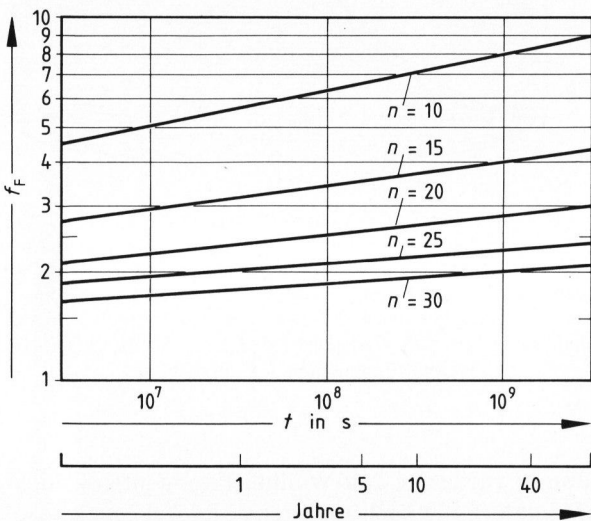


Bild 7. Ermüdungsfaktor f_F in Abhängigkeit von der vorgesehenen Einsatzzeit t_V , bezogen auf eine effektive Versuchszeit $t_{eff,L} = 1$ s mit dem Widerstandswert der Spannungsrißkorrosion n als Parameter.

lungsfaktors $L(\lambda, \dots)$ erst dann auszuführen, wenn alle anderen Probleme gelöst sind.

In Bild 5 ist $L(\lambda, \dots)$ veranschaulicht. Es ist zu sehen, daß $L(\lambda, \dots)$ zunimmt, wenn λ abnimmt, wodurch begründet ist, daß in Gleichung (17) mit $\lambda = 8$ und nicht mit $\lambda = 9$ gerechnet wurde.

5.2. Wahrscheinlichkeitsfaktor f_P (Probability factor) Definition und Beispiel

Der Wahrscheinlichkeitsfaktor f_P ist das Verhältnis der charakteristischen Festigkeit σ_0 zur Festigkeit bei der maximal erlaubten Ausfallwahrscheinlichkeit F_V .

$$f_P = \sigma_0(S_V, 63\%, R) / \sigma(S_V, F_V, R). \quad (18)$$

Konstant bleiben die Vorhersagefläche $S_V^{(10)}$ und die Anstiegsgeschwindigkeit der Spannung $d\sigma/dt = \dot{\sigma} =$

¹⁰⁾ Der Faktor f_P kann natürlich auch auf die Laborfläche angewendet werden. Das ist auch daraus ersichtlich, daß die Fläche in der Realisierungsgleichung (19) nicht vorkommt.

$= R; \sigma_0$ heißt immer 63 % Ausfall. Zu beachten ist, daß im Nenner nur σ steht.

Die Realisierung hierzu lautet:

$$f_P = \frac{1}{\left(\ln \frac{1}{1 - F_V}\right)^{1/\lambda}}. \quad (19)$$

Im Beispielsind: $F_V = 0,1\% = 0,001$ und $\lambda = 8,7$, also $f_P = 2,21$; d. h., daß die erlaubte Spannung bei kleiner Ausfallwahrscheinlichkeit nur betragen darf:

$$\sigma(S_V, F_V, R) = \sigma_0(S_V, 63\%, R) / f_P = \frac{48 \text{ N/mm}^2}{2,21} = 22 \text{ N/mm}^2.$$

(In Bild 3 beträgt $\sigma_0 = 80 \text{ N/mm}^2$. 0,1 % Ausfall sollte also bei $80 \text{ N/mm}^2 / 2,21 = 36,2 \text{ N/mm}^2$ liegen, was unschwer zu extrapolieren ist¹⁰⁾).

Eine grafische Darstellung von f_P ist in Bild 6 zu finden, ferner sei auf eine Näherungsformel für kleine Ausfallwahrscheinlichkeiten F_V hingewiesen:

$$f_P = 1 / (F_V)^{1/\lambda} \quad (20)$$

bzw.

$$F_V = 1 / (f_P)^\lambda;$$

streng gilt:

$$F_V = 1 - \exp(-f_P^{-\lambda}). \quad (21)$$

5.3. Ermüdungsfaktor f_F (Fatigue factor)

5.3.1. Definition und Beispiel

Der Ermüdungsfaktor f_F ist das Verhältnis der dynamischen Festigkeit der Vorhersagefläche bei der Anstiegsrate R der Biegespannung zur Festigkeit unter statischer Belastung $\sigma_k(\dots)$ während der Zeit t_V .

$$f_F = \sigma(S_V, F_V, R) / \sigma_k(S_V, F_V, t_V). \quad (22)$$

Hier wird also im dritten Schritt der Übergang von der dynamischen Belastung (charakterisiert durch R) zur statischen Belastung (charakterisiert durch den Index k und die geforderte Standzeit t_V) vollzogen. Alles spielt sich bei der geforderten Ausfallwahrscheinlichkeit F_V ab.

Die Realisierungsgleichung

$$f_F = (t_V / t_{eff,L})^{1/n} \quad (23)$$

enthält eine effektive Zeit $t_{eff,L}$, die mit einer Meßzeit $t_{mess,L}$ über

$$t_{eff,L} = t_{mess,L} / (n + 1) \quad (24)$$

so verknüpft ist, wie es in [9, Bild 8] dargestellt ist.

Diese Meßzeit $t_{\text{mess,L}}$ bezieht sich auf anschwellende Last mit der Spannungsrate R wie im Laborversuch, jedoch endet sie bei der Festigkeit der Vorhersagefläche S_V und der geforderten maximalen Bruchwahrscheinlichkeit F_V , d. h. es gilt

$$t_{\text{mess,L}} = \sigma(S_V, F_V, R) / R ; \quad (25)$$

$\sigma(S_V, F_V, R)$ ergibt sich aus den Gleichungen (11) und (18) zu

$$\sigma(S_V, F_V, R) = \sigma_0 / (f_A f_P) . \quad (26)$$

Die Gleichungen (23 bis 26) sollen jetzt dazu verwendet werden, um den Ermüdungsfaktor f_F für das Bauteil nach Tabelle 1 zu berechnen.

Zunächst ergibt sich aus Gleichung (26) die erlaubte dynamische Spannung an der effektiven Fläche $S_{\text{eff,V}}$ mit 0,1 % Ausfallwahrscheinlichkeit:

$$\sigma(S_V, \dots) = \frac{\sigma_0}{f_A f_P} = \frac{79,7 \text{ N/mm}^2}{1,67 \cdot 2,21} = 21,57 \text{ N/mm}^2 .$$

Mit Gleichung (25) läßt sich die Meßzeit dieses Wertes ermitteln, wenn man die Spannung mit $R = 2 \text{ N/(mm}^2 \text{ s)}$ ansteigen läßt:

$$t_{\text{mess,L}} = \frac{\sigma_V}{R} = \frac{21,57 \text{ N/mm}^2}{2 \text{ N/(mm}^2 \text{ s)}} = 10,8 \text{ s} .$$

Gleichung (24) gibt die effektive Meßzeit mit $n = 20$:

$$t_{\text{eff,L}} = t_{\text{mess,L}} / (n + 1) = \frac{10,8 \text{ s}}{21} = 0,51 \text{ s} .$$

Damit erhält man den Ermüdungsfaktor f_F für $t_V = 1$ Jahr nach Gleichung (23)

$$f_F = \left(\frac{31\,536\,000}{0,51} \right)^{1/20} = 2,45 .$$

In Bild 7 ist der Ermüdungsfaktor f_F für verschiedene Werte der Mindestlebensdauer t_V in Abhängigkeit von n dargestellt. Dabei wurde als effektive Zeit immer 1 s angenommen. Eine unkritische Anwendung würde im Beispiel auf einen um 3,4 % zu hohen Wert für f_F führen, d. h. unter der Ablesegenauigkeit liegen.

5.3.2. Ermüdungsfaktor f_F bei zeitlich sich ändernder Last

Bei dem Beispiel in Tabelle 1 sind der Druck p und damit die Spannung $\sigma(x,y)$ zeitlich über ein Jahr konstant. Dies ist ein selten auftretender Fall. Deshalb soll jetzt der allgemeinste Fall einer Spannungsreise $\sigma_w(t)$ (siehe [9, Bild 6]) behandelt werden, über den bereits 1974 gearbeitet wurde [19 bis 21] (siehe aber auch [14 und 22]).

Das Ziel ist (analog zu Abschnitt 5.1.2.), durch Einführen einer effektiven Zeit $t_{\text{eff,V}}$ die zeitlich wechselnde Last auf den Fall konstanter Last zurückzuführen.

Der Druck p möge sich in der Vorhersagezeit t_V nach der Funktion $p_w(t)$ willkürlich ändern. Also ändert sich die Spannung nach der Funktion

$$\sigma_w(x,y,t) = \sigma(x,y) p_w(t) / p .$$

In einem ersten Schritt wird der Maximalwert $\sigma_{w,\text{max}}$ bis zum Ende der Vorhersagezeit t_V gesucht.

Im zweiten Schritt wird eine dimensionslose Hilfsfunktion $h(t)$ eingeführt:

$$\begin{cases} h(t) = \sigma_w(t) / \sigma_{w,\text{max}} & \text{für } \sigma_w(t) \geq 0 \\ h(t) = 0 & \text{für } \sigma_w(t) < 0 \end{cases} . \quad (27)$$

Im dritten Schritt wird definiert:

$$t_{\text{eff,V}} = \int_0^{t_V} [h(t)]^n dt ; \quad (28)$$

siehe die Beziehung zum Risikointegral in [9, Gleichung 13].

Die verbesserte Realisierungsgleichung für f_F (Gleichung (23)) in Analogie zu Gleichung (15) lautet damit:

$$f_F = (t_{\text{eff,V}} / t_{\text{eff,L}})^{1/n} . \quad (29)$$

Im Beispiel konstanter Last (Tabelle 2) ist $h = 1$ und nach Gleichung (28) $t_{\text{eff}} = t_V$. Einige andere Fälle sind in den Bildern 8a bis f angegeben. Dabei wurde der in der Literatur [19] eingeführte g -Wert benutzt als:

$$t_{\text{eff}} = g(n, \dots) t_V = \int_0^{t_V} [h(t)]^n dt . \quad (30)$$

Da offensichtlich Ähnlichkeit zu Gleichung (17) besteht, könnte dies auch durch eine Bezeichnung zum Ausdruck gebracht werden: $L(\lambda, \dots) =$ geometrischer Lastverteilungsfaktor, $g(n, \dots) =$ zeitlicher Lastverteilungsfaktor. Beim Vergleich mit g - oder g^{-1} -Werten im Schrifttum sollte beachtet werden, daß in dieser Arbeit bewußt der maximal auftretende Zugspannungswert $\sigma_{w,\text{max}}$ zur Berechnung von $h(t)$ in Gleichung (27) und $g(n, \dots)$ in Gleichung (30) benutzt wurde, da dies Vorteile bei der Behandlung allgemeiner Spannungsverläufe aufweist. In [21, Anhang B] ist in gleicher Weise vorgegangen, in [14] und [21, Hauptteil und Anhang A] nicht.

5.4. Produkt f_{FOS} (Factor Of Safety)

5.4.1. Definition und Beispiel

Mit der Kenntnis der Einflußfaktoren f_A , f_P und f_F ist das in Abschnitt 2.3. gestellte Ziel fast erreicht. Es ist nur noch das Produkt der Definitionen (nach den

Gleichungen (11, 18 und 22) zu bilden

$$f_A f_P f_F = \frac{\sigma_0(S_L, 63\%, R)}{\sigma_0(S_V, 63\%, R)} \frac{\sigma_0(S_V, 63\%, R)}{\sigma(S_V, F_V, R)} \cdot \frac{\sigma(S_V, F_V, R)}{\sigma_k(S_V, F_V, t_V)} \quad (31)$$

dafür die Abkürzung f_{FOS} einzuführen

$$f_{FOS} = f_A f_P f_F, \quad (32)$$

und – gekürzt – ergibt sich

$$\sigma_k(\dots) = \sigma_0(S_L, 63\%, R) / f_{FOS}, \quad (33)$$

d. h. die erlaubte Spannung $\sigma_k(\dots)$ an der empfindlichsten Stelle des Glasbauteils unter Beachtung aller Auflagen aus der Labormessung.

Beispiel: Mit $f_A = 1,67$, $f_P = 2,21$ und $f_F = 2,45$ folgt $f_{FOS} = 9,04$. Aus $\sigma_0 = 79,7 \text{ N/mm}^2$ (Abschnitt 4.1.) folgt also $\sigma_k(\dots) = 8,81 \text{ N/mm}^2$ als erlaubte Spannung für die Fenstermitte als Dauerwert über ein Jahr mit 0,1 % Ausfallwahrscheinlichkeit.

Nun ergab aber die Spannungsanalyse (Abschnitt 3.) den Wert $\sigma_{max} = 10,8 \text{ N/mm}^2$. Wegen $\sigma_k(\dots) < \sigma_{max}$ folgt die Ablehnung der Konstruktion.

Was passiert, wenn das Fenster trotz der Ablehnung in Betrieb genommen wird? Es wird sich eine Ausfallwahrscheinlichkeit einstellen, die höher ist,

	Spannungsreise (zeitlicher Verlauf der angelegten Spannung) $\sigma_w(t)$	Hilfsfunktion $h(t)$	effektive Zeit $t_{eff} =$	zeitlicher Lastverteilungsfaktor $g(n, \dots) =$	Literatur
a)			t_V	1	—
b)			$\frac{t_V}{n+1}$	$\frac{1}{n+1}$	[9]
c)			$\Delta t_1 + \Delta t_2$	$(\Delta t_1 + \Delta t_2) / t_V$	—
d)			$\Delta t_1 + (\sigma_3/\sigma_1)^n \Delta t_3$	$\frac{\Delta t_1 + (\sigma_3/\sigma_1)^n \Delta t_3}{t_V}$	—
e)			$\frac{t_V}{\sqrt{2\pi n} \left(1 + \frac{1}{4n} + \frac{1}{32n^2} + \dots\right)}$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi n} \left(1 + \frac{1}{4n} + \frac{1}{32n^2} + \dots\right)}$	[21]
f)			wie b)	wie b)	[22]
a) bis f):	t	t			

Bilder 8a bis f. Zum zeitlichen Lastverteilungsfaktor $g(n, \dots)$. Der Übergang von der Spannungsreise $\sigma_w(t)$ zur Hilfsfunktion $h(t)$ wird durch Gleichung (27) vermittelt. t_{eff} ist nach Gleichung (28) berechnet, $g(n, \dots)$ ergibt sich aus Gleichung (30);

- a) statische (= konstante) Last,
- b) dynamische Last,
- c) unterbrochene statische Last gleicher Größe,
- d) unterbrochene statische Last verschiedener Größe mit unwirksamen Druckspannungsbereichen,
- e) Sinusverlauf mit dem Mittelwert Null,
- f) zufällige lineare Zyklen.

als in Tabelle 1 mit $F_V = 0,1\%$ gefordert. Sie soll nachfolgend abgeschätzt werden:

$\sigma_k(\dots)$ nach Gleichung (33) hatte bisher den Charakter einer Empfehlung, denn bei Konzentration auf den wichtigen Parameter F_V gilt mit Gleichung (32) die Schreibweise

$$\frac{\sigma_0}{f_A f_P(\dots F_V) f_F} \rightarrow \sigma_k(\dots, F_V \dots),$$

wobei die linke Seite gegeben ist. Jetzt ist aber umgekehrt ein fester Wert $\sigma_k = 10,8 \text{ N/mm}^2$ vorgegeben und F_V , bisher eine feste Zahl, wird eine Funktion von σ_{\max} , was durch ein Schlangenzeichen angedeutet sei. (Das gilt damit auch für f_P .) Man kann also schreiben:

$$\frac{\sigma_0}{\sigma_k f_A f_F} = \tilde{f}_P(\dots \tilde{F} \dots).$$

Um \tilde{F} zu berechnen, ist zu beachten, daß sich f_A überhaupt nicht ändert und f_F nur unwesentlich. So ergeben sich folgende Rechenschritte im Beispiel:

$$\tilde{f}_P(\dots \tilde{F} \dots) = \frac{\sigma_k(\dots F_V) f_P(\dots F_V)}{\sigma_k} = \frac{8,81 \text{ N/mm}^2 \cdot 2,21}{10,8 \text{ N/mm}^2} = 1,80.$$

Aus Gleichung (21) folgt für die sich einstellende Ausfallwahrscheinlichkeit $\tilde{F} = 0,006 = 0,6\%$, wenn das Fenster trotz Ablehnung benutzt wird. Mit dieser Betrachtungsweise ist auch der eingangs (Abschnitt 2.) gewählten Formulierung des Ziels Genüge getan.

5.4.2. Änderung der Fensterdicke

Die maximal erlaubte Spannung $\sigma_k(\dots)$ hängt zwar vom Radius a des Sichtfensters ab, nicht aber von seiner Dicke δ . Wird also die Fensterdicke auf den Wert δ' erhöht, so ändert sich nur σ_{\max} nach der Beziehung:

$$\sigma_{\max}(\delta') = 10,8 (3 \text{ cm}/\delta')^2 \text{ N/mm}^2.$$

Für Dicken über $\delta' = 3,32 \text{ cm}$ liegt die maximale Spannung σ_{\max} unter $8,82 \text{ N/mm}^2$, und die Konstruktion ist dann formal anzunehmen. (Die in Abschnitt 3. angegebenen Formeln gelten für Plattendicken bis $1/4$ des Durchmessers [3], d. h. hier bis $\delta' = 4,5 \text{ cm}$.)

Wichtiger Hinweis: Bei der Realisierung des Beispiels darf man sich nicht sklavisch an diese Zahlen halten; sie sollen mehr den Rechengang erläutern. Die am Rande wirkenden Dichtkräfte sind nicht leicht bzw. überhaupt nicht berechenbar. In diesem Sinne ist entweder großzügig zu dimensionieren bzw. durch thermische Vorspannung jegliche Unsicherheit aus dem Wege zu räumen.

5.4.3. Geschlossene Darstellung für $\sigma_k(\dots)$

Wird Gleichung (32) in Gleichung (33) eingesetzt, dann f_F über die Gleichungen (23) bis (26) ersetzt, später f_F über Gleichung (12) und f_P über Gleichung

(19) eliminiert, erhält man eine Formel, in der die Parameter der Vorhersage (S_V , F_V und t_V) sowie die Parameter des Laborversuchs (σ_0 , λ , n , S_L und R) als Variable erscheinen:

$$\sigma_k(\underbrace{\sigma_0, \lambda, n, S_L, R}_L; \underbrace{S_V, F_V, t_V}_V) = \left[\sigma_0^{\lambda} S_L / S_V \ln \frac{1}{|1 - F_V|} \right]^{1/\lambda(1+(1/n))} \cdot ((n+1) R t_V)^{-1/n}. \quad (34)$$

Es liegt nahe, für Gleichung (34) ein Rechenprogramm zu schreiben. Der Weg über die Kenntnis der einzelnen Faktoren f_A , f_P und f_F vermittelt aber ungleich mehr Einsicht in die Entstehung des Wertes $\sigma_k(\dots)$, daß sie unbedingt zusätzlich ausgedruckt werden sollten.

5.4.4. Nachweis der Übereinstimmung von $\sigma_k(\dots)$ mit den Gleichungen in [9]

Jetzt sollen, wie am Ende des Abschnittes 2.3. angekündigt, die Realisierungsgleichungen der axiomatisch eingeführten Einflußfaktoren f_A , f_P und f_F nachträglich begründet werden. Dazu wird von [9, Gleichung (12)] ausgegangen, in der die Weibull-Verteilung der Lebensdauer t_{Bk} bei konstanter Last $\sigma_w = \sigma_k$ dargestellt ist. Diese Gleichung – ergänzt um die aus Darstellungsgründen erst später [9, Gleichung (24)] eingeführte Flächenabhängigkeit – lautet:

$$F(t_{Bk}, \sigma_k) = 1 - \exp \left[- \frac{S_V}{S_L} \left(\frac{\sigma_k^n t_{Bk}}{K_0} \right)^b \right]. \quad (35)$$

Dabei gilt für die Ausfallsteilheit b nach [9, Gleichung (22)]:

$$b = \frac{\lambda}{(n+1)} \quad (36)$$

und für die Konstante K_0 (aus Gleichung (23) mit Gleichung (6) in [9])

$$K_0 = \frac{Z_0^{n+1}}{n+1} = \frac{\sigma_0^{n+1}}{R(n+1)}. \quad (37)$$

In Gleichung (35) ist σ_k ein exakt vorgegebener Wert. Die Lebensdauer t_{Bk} ist dann natürlich eine durch die Funktion F beschriebene Zufallsgröße. Gleichung (35) kann aber auch anders aufgefaßt werden:

Gegeben seien F als fester Wert F_V (vorgegebener Höchstausfall) und t_V als minimale Lebensdauer; dann ist – von den Flächen einmal abgesehen – nur über eine geeignete Wahl von $\sigma_k(\dots)$, der angelegten Spannung, die Gleichung (35) zu erfüllen. In der vorliegenden Arbeit ist in dieser Form vorgegangen worden. Wird die Bezeichnungsänderung vorgenommen, so kann Gleichung (35) nach $\sigma_k(\dots)$ aufgelöst werden. Ersetzt man dann noch K_0 gemäß Gleichung (37), so kommt man zu Gleichung (34). Diese aber ist aus den drei Einflußfaktoren entstanden, womit die gewünschte Übereinstimmung bewiesen ist.

5.4.5. Vollständigkeit

Mit den drei Einflußfaktoren f_A , f_P und f_F können die meisten Voraussagen bearbeitet werden. Doch gibt es Fälle, in denen eine Verfeinerung des Vorhersagemodells erwünscht ist. So herrscht beim Doppelringverfahren in der Fläche S_L ein weitgehend homogener zweiachsiger Spannungszustand, dessen beide Hauptspannungen gleich groß sind, während beim Vierschneidenverfahren (etwa nach [23]) in der entsprechenden Fläche S'_L nur ein einachsiger vorliegt. Ein Axialfaktor f_{Ax} ist dann erforderlich [16], wenn Meßwerte beider Verfahren kritisch verglichen werden sollen. Hierbei kann – wie übrigens allgemein auch – der Zahlenwert des Einflußfaktors unter Eins liegen. Die Vorhersage braucht ferner nicht notwendig eine größere Zeit als die Messung zu betreffen (siehe dazu auch [24 und 25]).

Viele neue Einflußfaktoren müßten eingeführt werden, wenn nicht wie hier von einer Gleichheit der Glasart, des Oberflächenzustandes und des Umgebungsmediums bei Glasbauteil und den Laborprüflingen ausgegangen wird. Doch sollten neue Faktoren nur eingeführt werden, wenn es unbedingt erforderlich ist, da sonst die Gefahr besteht, durch formale Operationen von den wahren Schwierigkeiten (λ -Bestimmung bei Mischverteilungen, Fehlerbeurteilungen usw.) abzulenken.

6. Zusammenfassung und Ausblick

Allgemein und an einem Beispiel wurde gezeigt, welcher Weg beschritten werden muß, um eine Voraussage der Haltbarkeit für ein Bauteil aus Glas oder Glaskeramik zu machen, wenn es einer quasistatischen mechanischen Belastung ausgesetzt wird. Zuerst muß an der Oberfläche des Bauteils in der Umgebung der maximalen Biegezugspannung σ_{max} eine Spannungsanalyse ausgeführt werden. Dann sind Festigkeitsmessungen erforderlich, die an plattenförmigen Proben aus dem gleichen Material im Labor vorgenommen werden. Als Meßverfahren ist besonders das Doppelringverfahren zu empfehlen, da u. a. die Größe der Prüffläche S_L gut definiert ist. Die Proben sollten vor der Messung Oberflächenverletzungen aufweisen, wie sie auch beim Bauteil nach einer gewissen Einsatzzeit zu erwarten sind. Feuchte und Temperatur sollten den Einsatzbedingungen des Bauteils ebenfalls nachgebildet sein.

Für die noch verbleibenden Unterschiede zwischen dem Bauteil und seinen Belastungsbedingungen und der Laborprüfung werden – in Anlehnung an Gleichungen in [9] – drei Einflußfaktoren definiert:

a) Flächenfaktor f_A . Er erlaubt den Übergang im Festigkeitsverhalten von der Laborfläche S_L auf die meist größere Fläche des Bauteils S_V , deren Definition im allgemeinen Fall in Abschnitt 5.1.2. behandelt ist.

b) Wahrscheinlichkeitsfaktor f_P . Er verknüpft die statistische Auswertung der Laborproben mit der maximal erlaubten Ausfallwahrscheinlichkeit des Bauteils.

c) Ermüdungsfaktor f_F . Die dynamische Messung im Labor (mit konstanter Spannungsrate) wird in Beziehung gesetzt zum statischen Einsatz des Bauteils. Allerdings werden in Abschnitt 5.3.2. auch Methoden behandelt, die sehr allgemeine quasistatische Spannungsverläufe einbeziehen. Es spielt also prinzipiell keine Rolle, ob eine Glasscheibe unter konstantem Wasserdruck ein Fotoelement schützt oder der Raketenstart eines Röntgenteleskopspiegels aus Glaskeramik erfolgt; wenn nur die Zeitverläufe der Spannungen bekannt sind, so ist eine Voraussage möglich.

Aus diesen drei Faktoren und den Meßergebnissen an den Proben kann eine Empfehlung für die am Glasbauteil am Ort des Spannungsmaximums zulässige Biegespannung $\sigma_k(\dots)$ abgeleitet werden. Gilt dafür $\sigma_k(\dots) \geq \sigma_{max}$, so ist die Konstruktion im Sinne dieses Vorhersagekonzepts annehmbar.

Die erlaubte Biegezugspannung $\sigma_k(\dots)$ hat zwar den Charakter eines Festigkeitswertes, hängt aber doch neben dem Zustand der Oberfläche und anderen, dem Material zuzuordnenden Merkmalen ganz entscheidend von der Größe des Bauteils und seinen Einsatzbedingungen ab. Daß diese Komplikation prinzipieller Natur ist und nur von der Streuung der Festigkeitswerte (d. h. endlicher Weibull-Faktor λ) und der Ermüdung (d. h. endlicher Widerstandswert der Spannungsrißkorrosion n) abhängt, ergibt sich durch den Grenzübergang $\lambda \rightarrow \infty$, $n \rightarrow \infty$ (d. h. weder Streuung noch Ermüdung) an Gleichung (34) mit dem Ergebnis

$$\lim_{\lambda, n \rightarrow \infty} \sigma_k(\dots) = \sigma_0,$$

d. h. den klassischen Grenzfall des Festigkeitsbegriffs.

Die Empfehlung $\sigma_k(\dots)$ hängt besonders empfindlich von dem Wert des Weibull-Exponenten λ ab. Mit einer höheren gewünschten Qualität der Empfehlung steigt naturgemäß der Meßaufwand. Es besteht auch die Gefahr, Mischverteilungen der Meßwerte zu übersehen und über zu kleine λ -Werte zu unrealistisch niedrigen Werten der Vorhersagen zu gelangen, die aber natürlich nicht besser sein können als die benutzten Meßwerte. Wegen der Aufspaltung des Vorhersageproblems in übersehbare Einflußfaktoren ist die Erkennung von Fehlern jedoch erleichtert.

Soll das für Glas und Glaskeramik entwickelte Konzept auf andere spröde Materialien wie Glasfasern und Keramik angewendet werden, muß der Flächenfaktor f_A durch einen Längen- bzw. Volumenfaktor sinngemäß ersetzt werden. Die anderen Faktoren f_P und f_F bleiben erhalten.

Der Autor dankt den Herren Dipl.-Phys. O. Lindig und Dr.-Ing. G. Winckelesser für Diskussionen und Ermunterung.

7. Formelzeichen

7.1. Symbole

a	Fensterradius	t_V	Zeitdauer des Bauteileinsatzes
b	Ausfallsteilheit	W	Gesamtlast auf dem Fenster durch Wasserdruck
$c(x,y)$	Hilfsfunktion zur Berechnung der effektiven Bauteilfläche S_{eff}	x, y	Koordinaten auf der Bauteiloberfläche der charakteristischen Festigkeit der Labor-meßwerte bei $R = 1 \text{ N}/(\text{mm}^2 \text{ s})$ proportionale Konstante (Gleichung (37))
D	Fensterdurchmesser	Z_0	thermischer Längenausdehnungskoeffizient
$F(\dots)$	Weibull-Verteilungsfunktion. Zufallsvariable: Biegefestigkeit oder Lebensdauer	α	Fensterdicke nach Aufgabe
\bar{F}	Bruchwahrscheinlichkeit für das Beispiel aus Tabelle 1	δ	Fensterdicke nach geänderter Aufgabe
F_V	maximal erlaubte Ausfallwahrscheinlichkeit	δ'	Weibull-Exponent
f_A	Flächenfaktor	λ	Poisson-Zahl
f_F	Ermüdungsfaktor	μ	Biegespannung
f_P	Wahrscheinlichkeitsfaktor	σ_b	Anstiegsgeschwindigkeit der Biegespannung = R
f_{FOS}	Produkt aus $f_A \cdot f_F \cdot f_P$	δ_b	Biegefestigkeit (= σ_B)
$G(t)$	Prüfkraft	σ_{BB}	arithmetischer Mittelwert der einzelnen Festigkeitsmessungen
$g(n, \dots)$	zeitlicher Lastverteilungsfaktor	$\frac{\sigma_{\text{BB}}}{\sigma_{\text{BBi}}}$	konstante Spannung
$h(t)$	Hilfsfunktion zur Berechnung der effektiven Zeit t_{eff}	σ_k	maximal erlaubte Spannung unter den Bedingungen der Aufgabe am Bauteil = $\sigma_k(\sigma_0, \lambda, n, S_L, R, S_V, F_V, t_V)$
K_0	Konstante in Gleichung (37)	$\sigma_k(\dots)$	Maximalwert der Spannung in der Bauteiloberfläche
$L(\lambda, \dots)$	geometrischer Lastverteilungsfaktor	σ_{max}	Radialspannung
n	Widerstandswert der Spannungsrißkorrosion	σ_r	dynamische Festigkeit der Vorhersagefläche bei F_V und R
p	Wasserdruck	$\sigma(S_V, F_V, R)$	Tangentialspannung
r	Länge des Radiusvektors	σ_t	willkürlicher Spannungsverlauf
$R = \dot{\sigma}_b$	Spannungsrate = Anstiegsgeschwindigkeit der Biegespannung $\dot{\sigma}_b$	$\sigma_w(t)$	Maximalwert des willkürlichen Spannungsverlaufs
s	empirische Standardabweichung der Festigkeitswerte im Labor	$\sigma_{w,\text{max}}$	Spannung in der Bauteiloberfläche charakteristische Festigkeit aus der Labormessung
$S_{\text{eff,L}}$	effektive Fläche der Laborprobe	$\sigma(x,y)$	charakteristische Festigkeit der Vorhersagefläche S_V
$S_{\text{eff,V}}$	effektive Fläche des beanspruchten Bauteils gleichmäßig maximal beanspruchte Fläche bei der Laborfestigkeitsmessung	σ_0	Polarwinkel
S_L	Fläche des unter Zugspannung stehenden Bauteils	$\sigma_0(S_V, 63\%, R)$	
S_V	Fläche des unter Zugspannung stehenden Bauteils	φ	
t	Zeit		
t_{Bk}	Lebensdauer bei konstanter Last		
$t_{\text{eff,L}}$	die $t_{\text{mess,L}}$ zugeordnete effektive Zeit		
$t_{\text{eff,V}}$	effektive Zeit für das Bauteil (siehe Gleichung (30))		
$t_{\text{mess,L}}$	Zeit bis zum Bruch einer Laborprobe, die auf die Fläche $S_{\text{eff,V}}$ und die Ausfallwahrscheinlichkeit F_V hochgerechnet ist (Spannungsrate R)		

7.2. Indizes

L	Labor
V	Vorhersage

8. Literatur

- [1] Maier, H. R.; Nink, H. und Krauth, A.: Statistische Festigkeitseigenschaften, Krafteinleitung und Bauteilzuverlässigkeit am Beispiel von reaktionsgebundenem Siliciumnitrid. Ber. Dt. keram. Ges. **54** (1977) S. 413–416.
- [2] Szabó, G.: Geschichte der mechanischen Prinzipien und ihrer wichtigsten Anwendungen. Basel, Stuttgart: Birkhäuser 1977. S. 351–424.
- [3] Roark, R. J.: Formulas for stress and strain. New York: McGraw-Hill 1954.
- [4] Roark, R. J. und Young, W. C.: Formulas for stress and strain. 5th ed. New York: McGraw-Hill 1976.
- [5] Akad. Verein Hütte Berlin (Hrsg.): Hütte (I). Theoretische Grundlagen. 28., neubearb. Aufl. Berlin: Ernst 1955. S. 942.
- [6] Schmitt, R. W., Blank, K. und Schönbrunn, G.: Experimentelle Spannungsanalyse zum Doppelringverfahren. Sprechsaal **116** (1983) Nr. 5, S. 397–405.
- [7] Normentwurf DIN 52 292, Teil 1 (Januar 1983): Prüfung von Glas und Keramik; Bestimmung der Biegefestigkeit, Doppelring-Biegeversuch an plattenförmigen Proben mit kleinen Prüfflächen. Berlin: DIN 1983. [Ref. Glastechn. Ber. **56** (1983) Nr. 3, 83R0537.]
- [8] Woelk, H. und Elsenheimer, K.: Biegebruchspannung von Floatglas und thermisch vorgespanntem Floatglas. Glastechn. Ber. **52** (1979) S. 14–24.
- [9] Exner, G. und Lindig, O.: Bestimmung des Widerstandswertes der Spannungsrißkorrosion n an Borosilicatglas Duran®. Glastechn. Ber. **55** (1982) Nr. 5, S. 107–117.
- [10] Stoll, R.; Forman, P. F. und Edelman, J.: The effect of different grinding procedures on the strength of scratched and unscratched fused silica. In: Symposium sur la résistance mécanique du verre et les moyens de l'améliorer. Florenz 1961. Charleroi: Union sci. Continentale Verre 1961. S. 377–392.
- [11] Scheidler, H.: Verletzlichkeit und technische Festigkeit von Glas. Glastechn. Ber. **50** (1977) S. 214–222.
- [12] Lindner, H. A.: Wiedenhorn, G. und Thoma, H.-J.: Bruchsicherheit von keramischen Großplatten aus der Sicht der Weibull-Statistik. Ber. Dt. keram. Ges. **53** (1976) S. 309–312.
- [13] Maier, H. R.; Krauth, A. und Gebhard, W.: Statistische und bruchmechanische Festigkeitsaspekte bei hohen Temperaturen. Laufradschaufeln aus reaktionsgebundenem Siliciumnitrid. Ber. Dt. keram. Ges. **55** (1978) S. 402–406.

- [14] Kerkhof, F.; Richter, H. und Stahn, D.: Festigkeit von Glas. Zur Abhängigkeit von Belastungsdauer und -verlauf. Glastechn. Ber. **54** (1981) S. 265–277.
- [15] Greil, E.: Festigkeit von Glas. GIT-Arbeitsblatt Beil. zu: Glas-Instrum.-Techn. **8** (1964) Nr. 8.
- [16] Norville, H. S. und Minor, J. E.: Strength of weathered window glass. Vortrag auf: Fall Meeting Glass Div., Amer. ceram. Soc., Oct. 1, 1982, Bedford, Pa. (USA).
- [17] Tummala, R. R.: Stress corrosion resistance compared with thermal expansion and chemical durability of glasses. Glass Technol. **17** (1976) S. 145–146.
- [18] Weil, N. A. und Daniel, I. M.: Analysis of fracture probabilities in nonuniformly stressed brittle materials. J. Amer. ceram. Soc. **47** (1964) S. 268–274. [Ref. Glastechn. Ber. **39** (1966) S. 344.]
- [19] Nadler, P.: Die Anwendung der statistischen Festigkeitstheorie in der keramischen Werkstoffprüfung. Teil 1: Eine anwendungsbereite Form der statistischen Festigkeitstheorie. Hermsdorfer techn. Mitt. (1972) Nr. 33, S. 1031–1038.
- [20] Nadler, P.: Die Anwendung der statistischen Festigkeitstheorie in der keramischen Werkstoffprüfung. Teil 2: Berücksichtigung des Zeiteinflusses im Rahmen der statistischen Festigkeitstheorie. Hermsdorfer techn. Mitt. (1974) Nr. 40, S. 1262–1271.
- [21] Evans, A. G. und Fuller, E. R.: Crack propagation in ceramic materials under cyclic loading conditions. Metallurg. Trans. **5** (1974) S. 27–33.
- [22] Ritter, J. E. jr.: Engineering design and fatigue failure of brittle materials. In: Bradt, R. C.; Hasselman, D. P. H. und Lange, F. F. (Hrsg.): Fracture mechanics of ceramics. Vol. 4. Crack growth and microstructure. New York, London: Plenum Press 1978. S. 667–686.
- [23] Normentwurf DIN 52 303, Teil 1 (Januar 1983): Prüfung von Glas; Bestimmung der Biegefestigkeit, Prüfung von Flachglas bei zweiseitiger Auflagerung. Berlin: DIN 1983. [Ref. Glastechn. Ber. **56** (1983) Nr. 3, 83R0538.]
- [24] Duckworth, W. H.; Rosenfield, A. R.; Gulati, S. T. u. a.: Basic principles of lens fracture testing. Amer. J. optom. physiol. Opt. **55** (1978) S. 751–759.
- [25] Duckworth, W. H.; Rosenfield, A. R.; Gulati, S. T. u. a.: Strength of thin chemtempered glass lenses: drop-ball testing. Amer. J. optom. physiol. Opt. **55** (1978) S. 801–806.