

DIMENSIONSANALYSE FÜR INGENIEURE

Dimensionstheoretische Grundlagen
und Anwendungsbeispiele

$$G(\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_q) = 0$$

Walter Kleinschmidt
Univ.-Prof. i.R. Dr.-Ing. PD
Universität Siegen
Department Maschinenbau

Vorwort

Der vorliegende Text stellt eine Überarbeitung und Erweiterung der Vorlesungsunterlagen dar, die der Verfasser während seiner früheren Lehrtätigkeit im Fachbereich Maschinentechnik der Universität Siegen erstellt hat. Dabei liegt der Schwerpunkt auf den für Ingenieure interessanten vielfältigen und teilweise umfangreichen Anwendungsbeispielen.

Mönchengladbach, 2021

W. Kleinschmidt

Inhalt

Einführung	3
1 Dimensionstheoretische Grundlagen	5
1.1 Physikalische Größen.....	5
1.2 Physikalische Gleichungen	8
1.3 Das pi-Theorem	10
2 Anwendungsgesichtspunkte zur Dimensionsanalyse.....	13
2.1 Ermittlung von problemrelevanten Einflussgrößen	13
2.2 Gewinnung von dimensionslosen Potenzprodukten	14
2.3 Berücksichtigung veränderlicher Stoffgrößen	16
2.4 Funktionsansätze für dimensionslose Beziehungen.....	18
3 Beispiele zur Dimensionsanalyse	19
3.1 Stationäre Rohrströmung	19
3.1.1 Strömungsform.....	19
3.1.2 Druckabfall in Strömungsrichtung	21
3.1.3 Wärmeübergang.....	25
3.2 Reibungsmoment bei der Strömung zwischen rotierenden Zylindern (Taylor-Couette-Strömung).....	29
3.3 Stationärer Wärmeübergang an einer Kugel in Querströmung.....	30
3.4 Zeitlicher Temperaturverlauf in einer angeströmten Kugel....	34
3.5 Temperatúrausgleich im Behälter.....	36
3.6 Wärmeabfuhr bei der Kompression eines Gases	40
3.7 Dissipation im Rührwerk.....	42
3.8 Tropfenfall in Gasatmosphäre	44
3.9 Laminare Flammendicke und Quenchabstand von der Wand	47
3.10 Turbulenzintensität im Verbrennungsmotor.....	50
3.11 Flammenfaltung bei der Verbrennung im Ottomotor	54
3.12 Durchbiegung des Freitragers	59
3.13 Luftwiderstand eines PKW	62
3.14 Risswachstum bei schwingender Beanspruchung	64
3.15 Gemischbildung am Einspritzstrahl	65
Literatur	71

EINFÜHRUNG

Die Dimensionsanalyse ist ein Instrument, das ganz allgemein und ohne jede Einschränkung in der ingenieurwissenschaftlichen Forschung und Entwicklung für verschiedene Zwecke zur Verfügung steht. Dabei geht es in der Regel darum, die für einen gegebenen physikalisch/technischen Sachverhalt relevanten Einflussgrößen zu benennen und die Beziehungen zwischen denselben in Form von mathematischen Gleichungen zu ermitteln, d. h. ein mathematisches Modell des interessierenden Sachverhaltes zu erstellen. Nun sind zwar die zur Aufstellung von mathematischen Modellen benötigten Gleichungen im Grunde genommen aus der Physik und Chemie bekannt; das betrachtete physikalisch/technische System mag jedoch so kompliziert und/oder komplex sein, dass eine rechnerische Auswertung der Gleichungen unter den gegebenen Randbedingungen ausgeschlossen erscheint. In solchen Fällen ist oftmals bereits viel gewonnen, wenn approximative halbempirische Gleichungszusammenhänge für die interessierenden Sachverhalte aufgestellt werden können, wobei dann die empirischen Koeffizienten durch geeignete Versuche zu bestimmen sind. Bei diesem Vorgehen kann die systematische Anwendung der Dimensionsanalyse erhebliche Vorteile mit sich bringen. Dasselbe gilt, wenn es um die Planung von geeigneten Versuchsreihen geht und um die mathematische Darstellung von Versuchsergebnissen. Außerdem gestattet die Dimensionsanalyse die Herstellung einer optimalen Verbindung zwischen Rechnung und Experiment. Die genannten Vorteile werden im Anwendungskapitel des vorliegenden Textes demonstriert.

Zur hinreichend sicheren Anwendung der Dimensionsanalyse empfiehlt sich eine gewisse Beschäftigung mit der dimensionstheoretischen Begründung derselben, und mit dem Begriff der „physikalischen Dimensionen“. Hierzu existiert eine umfangreiche Spezialliteratur, die den Stoff unter teilweise sehr unterschiedlichen Aspekten angeht und wobei auch zum Dimensionsbegriff verschiedenartige Auffassungen vertreten werden. Dieser Umstand erschwert es selbst dem eher wissenschaftlich ausgerichteten Ingenieur, sich in die Materie einzuarbeiten.

Für den Anwender, der die Dimensionsanalyse vor allem als nützliches Werkzeug sicher handhaben möchte, sind allerdings die Unterschiede hinsichtlich ihrer Ausdeutung und Begründung von nachrangiger Bedeutung. Es zeigt sich nämlich, dass man mit durchaus unterschiedlichen Dimensionsauffassungen zu gleichsam ordentlichen Resultaten gelangen kann. Deshalb wird in dem Grundlagenkapitel des vorliegenden Textes gar nicht erst versucht, eine Übersicht über verschiedene Sichtweisen zu geben und eine Abwägung zwischen diesen vorzunehmen. Vielmehr entscheidet sich der Verfasser in der Hauptsache für eine stark

geraffte und vereinfachte Auswahl aus den ausführlichen Grundlagendarstellungen von Görtler /1/, weil dieser nur die allgemein bekannte Zahlenalgebra für die Darlegung der dimensionstheoretischen Grundlagen verwendet.

Die Größenalgebra, die zwar im deutschen Sprachraum beim Rechnen in Physik und Technik häufig Verwendung findet ¹, wird hier nicht benötigt. Wie es der Name bereits sagt, operiert die Größenalgebra nicht mit Zahlen, sondern mit „Größen“, ausgedrückt durch algebraische Konstrukte aus Zahlenwert und Einheit, und erfordert dementsprechend auch einige besondere Rechenregeln. Dieser Sachverhalt, dessen man sich nicht immer voll bewusst sein mag, erschwert nach Ansicht von Görtler /1/, der sich der Verfasser anschließen möchte, den Zugang zu den hier zu behandelnden Grundlagen.

Eine sehr interessante und empfehlenswerte Grundlagendarstellung, die ebenfalls nur die Zahlenalgebra verwendet, findet man auch in Ain A. Sonin /4/.

¹ Dies gilt vor allem in Schulen und Bildungseinrichtungen für Handrechnungen, nicht aber in Forschung und Entwicklung bei mathematischen Berechnungen mit Computerprogrammen.

1 DIMENSIONSTHEORETISCHE GRUNDLAGEN

Im Zusammenhang mit einer Dimensionsanalyse ist man stets mit „physikalischen Größen“ und mit „physikalischen Gleichungen“ befasst. Deshalb erfolgt nachstehend zunächst eine Klärung dieser beiden Begriffe in Anlehnung an die Ausführungen in Görtler /1/.

1.1 Physikalische Größen

Als „physikalische Größen“ bezeichnet man solche Merkmale oder Eigenschaften von physikalischen Objekten, die in Verbindung mit Messvorschriften oder definierenden Rechenvorschriften quantifizierbar sind, insofern, als ihnen im Sinne einer Bewertung (größer, kleiner, gleich) Maßzahlen auf der Zahlenachse zugewiesen werden können. Dabei werden verschiedene Größenarten – z. B. Länge, Zeit, Masse, Geschwindigkeit, Energie – unterschieden, denen die Größen jeweils zuzuordnen sind.

Zur Festlegung der Maßzahlkala für eine bestimmte physikalische Größenart ordnet man der Maßzahl 0 eine **Nullgröße** und der Maßzahl 1 eine **Einheitsgröße** (oder kurz „Einheit“) der betreffenden Größenart zu. Beide Größen können weitgehend willkürlich gewählt werden. Wenn man für eine bestimmte Größenart unter Beibehaltung der Nullgröße die der Maßzahl 1 zunächst zugeordnete Einheitsgröße aufgibt und eine andere Größe mit einer Maßzahl $a \neq 1$ als neue Einheitsgröße auszeichnet, indem man nun dieser die Maßzahl 1 zuordnet, spricht man von einer **Einheitenänderung**. Dabei ändern sich alle mit der alten Einheit festgelegten Maßzahlen x_i von physikalischen Größen der betreffenden Art um denselben Faktor in $\bar{x}_i = (1/a)x_i$. Das *Verhältnis* der Maßzahlen x_1, x_2 zweier gleichartiger Größen ist hingegen invariant gegenüber Einheitenänderungen, da sich der Umrechnungsfaktor bei der Quotientbildung heraushebt,

$$\frac{\bar{x}_1}{\bar{x}_2} = \frac{(1/a)x_1}{(1/a)x_2} \quad (1.-1)$$

Diese Eigenschaft aller physikalischen Maßzahlkalen wird als die „absolute Bedeutung der relativen Größe“ bezeichnet.

In **Bild 1.1** ist skizziert, wie z. B. die Maßzahl der Masse eines Fahrzeugs im Prinzip ermittelt wird. Eine Mitteilung über das Messergebnis, die Fahrzeugmasse m , erfordert zu ihrer Aussagekraft neben der Angabe der Maßzahl x eine Information über die verwendete Einheitsgröße. Dies erfolgt üblicherweise durch die Schreibweise $m = x \text{ kg}$, die sich daraus ergibt, dass die Maßzahl x der Größe m das x -fache der Maßzahl 1 der Einheitsgröße 1 kg der Größenart Masse beträgt. Allgemein schreibt man $\mu = x\mu_1$. Hierin ist $x\mu_1$ der sogenannte „Größenwert“ der Größe μ . Die bekannte Interpretation des Größenwertes als „Produkt von Zahlenwert und Einheit“, mit dem man auch mathematisch operieren kann, gilt aber

nur in der sogenannten „Größenalgebra“, die, wie bereits in der Einführung erwähnt, hier nicht verwendet wird.

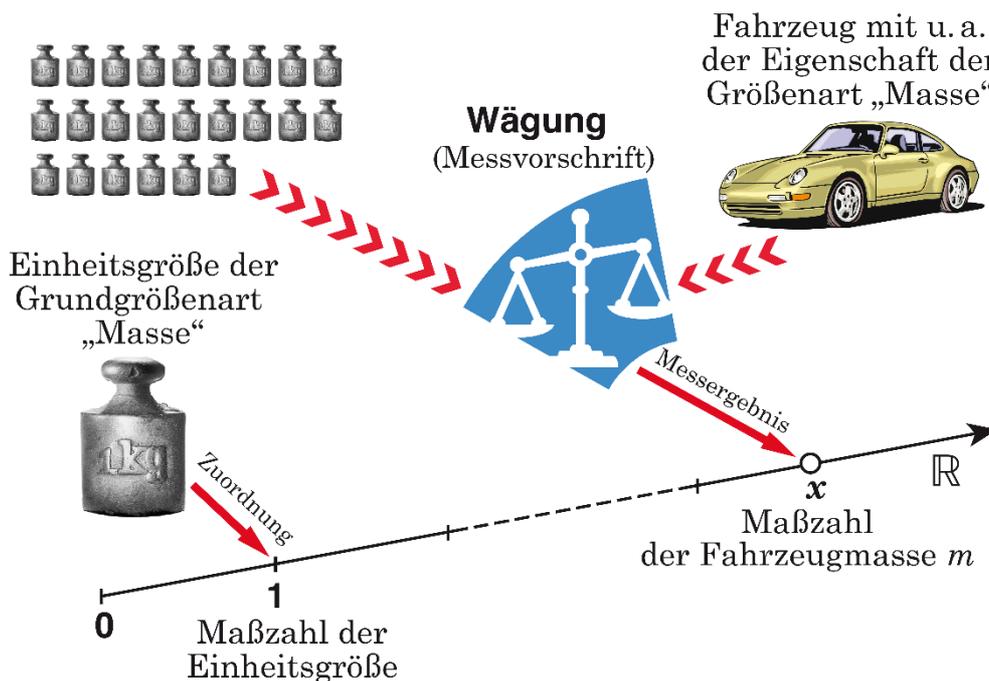


Bild 1.1: Zur Maßzahlbewertung von physikalischen Größen

Physikalische Größen einer bestimmten Größenart, für die die Maßzahlbewertung unabhängig von anderen Größen durch den Vergleich mit einem realen oder bei Bedarf realisierbaren Prototyp vorgenommen wird (z. B. die Masse in **Bild 1.1**), nennt man „**Grundgrößen**“ und die betreffende Größenart eine „Grundgrößenart“. Die einer Grundgrößenart zugeordnete Einheitsgröße heißt „Grundeinheit“.

In Physik und Technik bezieht man sich je nach Anwendungsbereich auf m Grundgrößenarten, die nach bestimmten Gesichtspunkten festgelegt wurden. So gelangt man zu unterschiedlichen Grundgrößensystemen, gekennzeichnet durch Symbole der Form $\{M_1, M_2, \dots, M_m\}$. Hierbei bezeichnen die M_i die Maßzahlen von je einer beliebigen Grundgröße der gewählten Grundgrößenarten bei irgendwie festgelegt gedachten Grundeinheiten. Für praktische Anwendungen trifft man häufig eine geeignete Auswahl aus den Grundgrößenarten Länge, Zeit, Masse, elektrische Stromstärke, Stoffmenge, thermodynamische Temperatur und Lichtstärke, für die die Grundeinheiten im internationalen Einheitensystem festgelegt sind. So verwendet man z. B. in der Mechanik ein $\{M(\text{Masse}), L(\text{Länge}), T(\text{Zeit})\}$ -System mit den Grundeinheiten kg, m und s. Im Hinblick auf dimensionsanalytische Anwendungen sollte man sich jedoch stets der völligen Freiheit bei der Festlegung der Grundgrößenarten bewusst bleiben, was auch sehr ungewöhnlich erscheinende Festlegungen einschließt.

Vor dem Hintergrund eines bestimmten $\{M_1, M_2, \dots, M_m\}$ -Systems spricht man dann von einer primären „**abgeleiteten Größenart**“, wenn für die Größen dieser Art eine definierende Rechenvorschrift

$$x = f(M_1, M_2, \dots, M_m) \quad (1.-2)$$

vorliegt, nach der ihre Maßzahlen x aus den beobachteten Maßzahlen M_1, M_2, \dots, M_m von im allgemeinen m Grundgrößen berechnet werden können. Für die definierende Rechenvorschrift (1.-2) wird gefordert, dass sie bei jeder Wahl der Grundeinheiten gilt, wobei die Maßzahlen x sich um einen festen Faktor a ändern, wenn die Grundeinheiten der M_1, M_2, \dots, M_m sich ändern, d. h.

$$\bar{x} = ax = f(\alpha_1 M_1, \alpha_2 M_2, \dots, \alpha_m M_m) \quad (1.-3)$$

Aus dieser Forderung lässt sich der für die Theorie der physikalischen Dimensionen fundamentale Sachverhalt ableiten, dass die definierende Funktion f folgendermaßen darstellbar sein muss:

$$f(M_1, M_2, \dots, M_m) = M_1^{\alpha_1} M_2^{\alpha_2} \dots M_m^{\alpha_m} f(1, 1, \dots, 1) \quad (1.-4)$$

mit $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$: feste Zahlen.

Somit sind die *Maßzahlen einer abgeleiteten Größenart* stets bis auf einen Zahlenfaktor $f(1, 1, \dots, 1)$, durch den die Einheit der abgeleiteten Größenart festgelegt wird, darstellbar als Produkt von Potenzen der Maßzahlen von m Grundgrößen. Fasst man die definierende Rechenvorschrift f so, dass $f(1, 1, \dots, 1) = 1$ wird - was immer möglich ist -, so erhält man für die abgeleitete Größenart sogenannte „kohärente Einheiten“.

Mit Gleichung (1.-4) kann unmittelbar auf das **Umrechnungsgesetz** geschlossen werden, mit dem die Maßzahlen x bei einer beliebigen Änderung der Grundeinheiten umzurechnen sind: Geht man für die Grundgrößenart k zu einer $1/\alpha_k$ fachen Einheit ($k = 1, 2, \dots, m$) über, so berechnet sich die neue Maßzahl

$\bar{x} = f(\alpha_1 M_1, \alpha_2 M_2, \dots, \alpha_m M_m)$ der abgeleiteten Größe aus der alten Maßzahl $x = f(M_1, M_2, \dots, M_m)$ zu

$$\begin{aligned} f(\alpha_1 M_1, \alpha_2 M_2, \dots, \alpha_m M_m) &= \alpha_1^{\alpha_1} \dots \alpha_m^{\alpha_m} M_1^{\alpha_1} \dots M_m^{\alpha_m} \\ &= \alpha_1^{\alpha_1} \dots \alpha_m^{\alpha_m} f(M_1, M_2, \dots, M_m) \end{aligned} \quad (1.-5)$$

d. h. es ist

$$\bar{x} = \alpha_1^{\alpha_1} \dots \alpha_m^{\alpha_m} x \quad (1.-6)$$

Die Exponenten $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ in den Gleichungen (1.-4) und (1.-6) sind durch die definierende Funktion f eindeutig festgelegt.

Zur Mitteilung dieser Exponenten, die gemäß Gleichung (1.-6) für beliebige Einheitenumrechnungen von x erforderlich sind, gibt man zweckmäßig das in Gleichung (1.-4) auftretende Potenzprodukt $M_1^{\alpha_1} M_2^{\alpha_2} \dots M_m^{\alpha_m}$ an, da hierin sofort kenntlich wird, welcher Exponent zu welcher Grundgrößenart gehört. Dieses Potenzprodukt heißt die „**Dimensionsformel**“ oder kurz die „**Dimension**“ der physikalischen Größe, deren Maßzahl x ist. Man wählt hierfür das Symbol $[x]$,

² Die Funktion f muss nicht immer unmittelbar in dieser Form gegeben sein

$$[x] = M_1^{a_1} M_2^{a_2} \dots M_m^{a_m} . \quad (1.-7)$$

Es ist üblich, $[x]$ abgekürzt die „Dimension von x “ zu nennen.

Wenn man die Dimension $[x]$ einer bestimmten physikalischen Größenart kennt, so kann man ihre für eine zunächst getroffene Wahl der Grundeinheiten bekannten Maßzahlen x in die Maßzahlen \bar{x} für jede andere Wahl der Grundeinheiten umrechnen.

In Verbindung mit **Bild 1.1** wurde bereits die Schreibweise für die „Größenwerte“ von Grundgrößen mitgeteilt, in der die Angabe der Maßzahl mit der Angabe der zugrundeliegenden Grundeinheit verknüpft wird. Bei abgeleiteten physikalischen Größen verallgemeinert man diese Schreibweise, indem die Information über die Grundeinheiten in der folgenden Weise an die Maßzahl angehängt wird: Man orientiert sich an der Struktur der Dimensionsformel der betreffenden Größe und tauscht darin die Symbole für die Maßzahlen der Grundgrößen durch die für die gewählten Grundeinheiten aus (z. B. M durch kg, L durch m, T durch s). Das so entstehende Konstrukt aus den Symbolen der mitzuteilenden Grundeinheiten, aus dem auch die Dimension der betreffenden Größe erkennbar ist, wird als die „Einheit“ dieser Größe bezeichnet. Oftmals werden die Begriffe Dimension und Einheit synonym verwendet, was aber nach Vorstehendem nicht korrekt ist.

Die Darstellung (1.-4) gilt trivialerweise auch für die Maßzahlen $x = M_k$ der Grundgrößen selbst. Für die Dimension einer Grundgröße, auch „Grunddimension“ genannt, wird dann sehr einfach

$$[x] = M_1^0 \dots M_{k-1}^0 M_k^1 M_{k+1}^0 \dots M_m^0 = M_k . \quad (1.-8)$$

Hat eine abgeleitete physikalische Größe die Dimension

$$[x] = M_1^0 M_2^0 \dots M_m^0 = 1 , \quad (1.-9)$$

so heißt diese Größe „dimensionslos“ bezüglich der zugrunde gelegten m Grundgrößenarten. Aus Gleichung (1.-6) ist zu ersehen, dass die Maßzahl einer dimensionslosen Größe unverändert bleibt, wenn man die in Betracht kommenden Grundeinheiten beliebig ändert.

Zusammenfassend ist festzustellen: Jede Größe, die in einem physikalischen Grundgrößensystem $\{M_1, M_2, \dots, M_m\}$ eine Dimension $[x]$ gemäß Gleichung (1.-7) mit reellen Werten der Exponenten a_1, a_2, \dots, a_m besitzt, nennt man eine **physikalische Größe**.

1.2 Physikalische Gleichungen

Es seien x_1, x_2, \dots, x_n und außerdem noch y die Maßzahlen von physikalischen Größen mit den damit existierenden Dimensionen

$$\begin{aligned} [x_i] &= M_1^{a_{i1}} M_2^{a_{i2}} \dots M_m^{a_{im}} , \quad i = 1, 2, \dots, n \\ [y] &= M_1^{b_1} M_2^{b_2} \dots M_m^{b_m} . \end{aligned} \quad (1.-10)$$

Die Maßzahlen y mögen mit den Maßzahlen x_i über die Gleichung

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (1.-11)$$

zusammenhängen. Bei dieser Gleichung kann es sich **1)** um die definierende Gleichung für eine abgeleitete Größenart mit den Maßzahlen y oder aber **2)** um eine naturgesetzliche Beziehung zwischen der Größenart mit den Maßzahlen y und den n Größenarten mit den Maßzahlen x_1, \dots, x_n handeln.

Der erste Fall stellt die Verallgemeinerung der primären abgeleiteten Größenart gemäß Gleichung (1.-2) dar, bei der die Maßzahlen der abgeleiteten Größenart speziell auf Maßzahlen von Grundgrößen zurückgeführt werden.

Bei Einheitenänderungen der Grundgrößenarten durch Übergang zur $1/\alpha_k$ - fachen Grundeinheit der k - ten Grundgrößenart, $k = 1, 2, \dots, m$, gelten somit für die Maßzahlen x_i und y die folgenden Umrechnungsgesetze

$$\begin{aligned} \bar{x}_i &= \alpha_1^{a_{i1}} \dots \alpha_m^{a_{im}} x_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \\ \bar{y} &= \alpha_1^{b_1} \dots \alpha_m^{b_m} y. \end{aligned} \quad (1.-12)$$

Damit diese Umrechnungsgesetze gelten können und dabei die Gleichung (1.-11) unabhängig von der Wahl der Grundeinheiten ihre Gültigkeit behält, d. h. stets auch

$$\bar{y} = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) \quad (1.-13)$$

gilt, muss zunächst die Funktion f die sogenannte Eigenschaft der „**Dimensionshomogenität**“ besitzen, d. h. es muss gelten

$$f(\alpha_1^{a_{11}} \dots \alpha_m^{a_{1m}} x_1, \dots, \alpha_1^{a_{n1}} \dots \alpha_m^{a_{nm}} x_n) = \alpha_1^{b_1} \dots \alpha_m^{b_m} f(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (1.-14)$$

Zudem muss der Umrechnungsfaktor $\alpha_1^{b_1} \dots \alpha_m^{b_m}$ auf der rechten Seite dieser Gleichung mit dem der Maßzahlen y übereinstimmen, so dass gilt

$$[y] = [f(x_1, x_2, \dots, x_n)]. \quad (1.-15)$$

Hierin ist $[f(x_1, x_2, \dots, x_n)]$ die Dimension der physikalischen Größenart, deren Maßzahlen die Funktionswerte $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ sind. Falls die beiden vorstehenden Gleichungen erfüllt sind, bezeichnet man Gleichung (1.-11) als eine **dimensionshomogene Gleichung**.

Allgemeiner kann formuliert werden: Eine Gleichung

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = g(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (1.-16)$$

heißt dimensionshomogene Gleichung, wenn f und g dimensionshomogene Funktionen sind und wenn

$$[f(x_1, x_2, \dots, x_n)] = [g(x_1, x_2, \dots, x_n)] \quad (1.-17)$$

ist. Diese Gleichung bedeutet, dass der in der Definitionsgleichung (1.-14) heraus tretende Umrechnungsfaktor $\alpha_1^{b_1} \dots \alpha_m^{b_m}$ bei den Funktionen f und g übereinstimmt, oder physikalisch, dass die Funktionswerte $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ und $g(x_1, x_2,$

\dots, x_n) Maßzahlen von physikalischen Größen gleicher Dimension im zugrundeliegenden $\{M_1, M_2, \dots, M_m\}$ - System sind.

Nach Vorstehendem ist die Eigenschaft der Dimensionshomogenität eine Eigenschaft der Zahlenwerte einer Funktion, wenn diese die Maßzahlen einer physikalischen Größenart sein sollen, bzw. einer Gleichung, wenn diese eine für alle Wahlen der Grundeinheiten gültige Gleichung zwischen Maßzahlen physikalischer Größenarten sein soll.

Im letzteren Fall spricht man von einer "physikalischen Gleichung". Diese ist das Äquivalent zu der im deutschen Sprachraum gebräuchlichen "Größengleichung", die eine Gleichung zwischen den physikalischen Größen selbst darstellt. Unter der Voraussetzung von kohärenten Einheiten sind die Formelschreibweisen, die zu den beiden verschiedenen Gleichungsauffassungen gehören, nicht voneinander zu unterscheiden.

Physikalische Gleichungen bieten infolge ihrer Eigenschaft der Dimensionshomogenität die Möglichkeit der sogenannten „Dimensionsprobe“: Eine physikalische Gleichung ist dann korrekt, d. h. dimensionshomogen formuliert, wenn auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens Größen bzw. Ausdrücke mit denselben Dimensionen stehen. Dabei ist es durch das Einführen einer geeigneten „Dimensionskonstanten“ stets möglich, die Eigenschaft der Dimensionshomogenität herzustellen.

Im Hinblick auf das Rechnen mit den Maßzahlen von physikalischen Größen lässt sich zeigen, dass die Produktverknüpfung, die Potenzierung, die Differentiation und die Integration von dimensionshomogenen Funktionen stets wieder auf dimensionshomogene Funktionen führen.

1.3 Das pi-Theorem

Für die im vorhergehenden Kapitel behandelten physikalischen Gleichungen gilt der nachstehend formulierte Sachverhalt, das sogenannte pi-Theorem.

Jede physikalische, d. h. dimensionshomogene Gleichung

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \tag{1.-18}$$

oder gleichbedeutend

$$g(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}) = 0 \quad \text{mit } x_{n+1} = y \tag{1.-19}$$

ist äquivalent einer Gleichung

$$g(\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_q) = 0, \tag{1.-20}$$

wobei die $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_q$ dimensionslose Potenzprodukte der Maßzahlen x_1, x_2, \dots, x_{n+1} sind. Für die Anzahl q dieser Potenzprodukte gilt

$$q = n + 1 - r. \tag{1.-21}$$

Hierin ist r der Rang (die maximale Anzahl linear unabhängiger Spalten- bzw. Zeilenvektoren) der sogenannten **Dimensionsmatrix**. Diese ist aus den Dimensionsexponenten der $n+1$ physikalischen Größen mit den Maßzahlen x_i in Gleichung (1.-19), bezogen auf das zugehörige $M_1 M_2 \dots M_m$ - System, zu bilden.

Die Zahlen a_{ij} der Dimensionsmatrix werden oftmals durch das Schema einer „Dimensionstafel“ (siehe **Bild 1.2**) ausführlicher angeschrieben, in dem am oberen Rand vermerkt ist, zu welchen Grundgrößen die Zahlen der einzelnen Spalten gehören, während am linken Rand die Maßzahlen derjenigen physikalischen Größen angegeben sind, denen die Zahlen der Zeilen (als Exponenten von deren Dimensionsformeln) zugeordnet sind.

A	M_1	M_2	\dots	M_m
x_1	a_{11}	a_{12}	\dots	a_{1m}
x_2	a_{21}	a_{22}	\dots	a_{2m}
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
x_n	a_{n1}	a_{n2}	\dots	a_{nm}
x_{n+1}	a_{n+11}	a_{n+12}	\dots	a_{n+1m}

Bild 1.2: Dimensionstafel (mit Dimensionsmatrix (a_{ij})) zu Gleichung (1.-19)

Die dimensionslosen Potenzprodukte $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_q$ bilden ein sogenanntes „Fundamentalsystem“ derart, dass es ein System von strukturell unabhängigen Potenzprodukten ist, und dass jedes beliebige (nicht in diesem System enthaltene) Potenzprodukt Π_i der x_1, \dots, x_{n+1} sich als Potenzprodukt der Π_1, \dots, Π_q darstellen lässt.

Die obige Äquivalenzaussage darf auch umgekehrt werden: Jede Gleichung zwischen den Maßzahlen von physikalischen Größen, die sich in der Form (1.-20) darstellen lässt, ist eine korrekte physikalische Gleichung.

Die Äquivalenzaussage des pi-Theorems führt bei der Anwendung in der physikalisch-technischen Forschung zu zwei historisch gewachsenen Ausdeutungen.

Erstens - Die Möglichkeit des Überganges von der physikalischen Gleichung (1.-18) bzw. (1.-19) auf die dimensionslose Darstellung (1.-20) impliziert, dass jeder nicht dimensionslos formulierte mathematische Zusammenhang zwischen den Maßzahlen physikalischer Größen grundsätzlich reduzibel ist, oder etwas anders ausgedrückt: Für einen physikalischen Vorgang sind nicht sämtliche dimensionsbehafteten Einflussvariablen einzeln maßgeblich, sondern nur bestimmte dimensionslose Kombinationen dieser Variablen. Dies ist insbesondere dort von Nutzen, wo es gilt, einen unbekanntem komplexen physikalischen Sachverhalt durch theoretisch-experimentelle Arbeiten oder eher noch durch das Experiment allein zu erforschen, und bei dem man lediglich in der Lage ist, die problemrelevanten physikalischen Größen mit einem gewissen Grad an Sicherheit zu benennen. Dann ist es stets möglich, durch eine sogenannte **Dimensionsanalyse** zu einem Fundamentalsystem von dimensionslosen Potenzprodukten Π_i überzuge-

hen und somit wegen der Aussage der Gleichung (1.-21) zu einer verringerten Anzahl von Variablen zu gelangen. Zur Durchführung der Dimensionsanalyse sind nur einige einfache algebraische Operationen erforderlich. Das jeweils vorliegende Problem kann auf diese Weise erheblich an Übersichtlichkeit gewinnen und der zu seiner Durchdringung erforderliche theoretische bzw. experimentelle Aufwand wird häufig deutlich reduziert.

Zweitens - Jeder Satz der Maßzahlen x_i in Gleichung (1.-19) repräsentiert eine ganz bestimmte Realisierung des physikalischen Sachverhaltes, der durch diese Gleichung beschrieben wird; demgegenüber sind einem Wertesatz der zugehörigen dimensionslosen Potenzprodukte in Gleichung (1.-20) definitionsgemäß immer unendlich viele verschiedene Realisierungsmöglichkeiten zugeordnet. Diese Eigenschaft der dimensionslosen Darstellungen liefert die Grundlage für die Ähnlichkeitstheorie und für das Modellversuchswesen: Es ist grundsätzlich möglich, physikalische Sachverhalte an einer nach gewissen Gesichtspunkten ausgewählten Realisierung oder aber auch an einem Modell, d. h. an einer speziell hergestellten Realisierung zu erforschen und dann die Ergebnisse auf eine andere eventuell noch gar nicht existierende Realisierung zu übertragen. Man spricht in solchen Fällen von einer Ähnlichkeits- oder Modellübertragung. Verschiedene Realisierungen eines physikalischen Sachverhaltes heißen exakt ähnlich, wenn die Zahlenwerte aller problemrelevanten Dimensionslosen übereinstimmen, bzw. partiell ähnlich, wenn die zahlenmäßige Übereinstimmung nur für einen Teil der Dimensionslosen gegeben ist.

Je nach Anwendungsgebiet werden in der theoretisch-experimentellen Forschung die beiden oben skizzierten Ausdeutungsgesichtspunkte weitgehend getrennt verfolgt oder aber auch so eng miteinander verknüpft, dass die zentrale Bedeutung der einen Äquivalenzaussage des pi-Theorems unmittelbar durchscheint. Um diesen Blick nicht zu verstellen, sollte die Verschiedenartigkeit der beiden klassischen Ausdeutungsmöglichkeiten des pi-Theorems nicht zu sehr betont werden.

Manchmal findet man in der Literatur die Feststellung, dass ein in dimensionsloser Darstellung gegebenes oder ein aus einer solchen Darstellung abgeleitetes Gesetz ein Ähnlichkeitsgesetz sei, mit der Ähnlichkeitstheorie in Einklang stehe oder aus der Ähnlichkeitstheorie abgeleitet sei. Solche Formulierungen sind zumindest unglücklich, denn nach dem pi-Theorem ist jede physikalische Gleichung – ungeachtet auch einer eventuell bestehenden besonderen Komplexität des betreffenden physikalisch-technischen Sachverhaltes – in dimensionsloser Form darstellbar.

Behauptete Gleichungen zwischen physikalischen Größen, die erst nach der Einführung von nicht näher erklärten Dimensionskonstanten in eine dimensionslose Form überführt werden können, sollten nur nach kritischer Diskussion des Bedeutungsinhaltes dieser Konstanten angewendet werden. Besonders bei experimentell ermittelten Gleichungen bergen Dimensionskonstanten, die vom Urheber nicht ausdrücklich erläutert werden, die Gefahr, dass die näheren Versuchsrand-

bedingungen in einer vom Experimentator nicht beabsichtigten und nicht kontrollierten Weise in die Gleichungsformulierung eingegangen sind. Solche Gleichungen haben in der Regel nur einen sehr engen Gültigkeitsbereich.

2 ANWENDUNGSGESICHTSPUNKTE ZUR DIMENSIONSANALYSE

2.1 Ermittlung von problemrelevanten Einflussgrößen

Bei komplexen technisch-physikalischen Problemstellungen, die oftmals in ihren wesentlichen Zügen nur experimentell erforscht werden können und bei denen aus Gründen der Übersichtlichkeit und des experimentellen Aufwandes das Interesse an einer rationellen dimensionslosen Darstellung besonders groß ist, trifft man häufig auf die Situation, dass mangels physikalischer Einsicht in das betreffende Problem keine vollständige Klarheit über die jeweiligen problemrelevanten Einflussgrößen, d. h. über die Größen mit den Maßzahlen x_i in den Gleichungen (1.-18) bzw. (1.-19) besteht³. Ein solcher Mangel ist natürlich nicht durch den Übergang zu einer dimensionslosen Darstellung nach Gleichung (1.-20) zu beheben. Da die Anwendung der Ergebnisse der Dimensionstheorie keine zusätzlichen physikalischen Informationen mit sich bringt, sondern immer nur eine bereits vorhandene Information in eine rationellere Form überführt, darf zu einer nicht problemadäquaten Liste von Einflussgrößen auch nur ein unzureichender Satz von dimensionslosen Potenzprodukten erwartet werden.

Eine bei der Benennung der problemrelevanten Einflussgrößen bestehende Unsicherheit kann allein über eine vertiefte physikalische Einsicht in das jeweils anstehende Problem verringert oder behoben werden. Hierzu ist zunächst alles verfügbare Erfahrungsmaterial eingehend zu sichten; außerdem kann es nützlich sein, gewisse Teilaspekte des Problems mit Hilfe von idealisierten Modellvorstellungen theoretisch zu diskutieren, um dann aus den grundlegenden physikalischen Gleichungen wichtige Einflussgrößen abzulesen. Dabei ist zu beachten, dass auch die in ein Problem eingehenden dimensionsbehafteten Konstanten, wie etwa die Erdbeschleunigung oder die allgemeine Gaskonstante, berücksichtigt werden müssen; nur dimensionslose Konstanten dürfen ignoriert werden. Weiterhin sollte man – im Allgemeinen unter Zugrundelegung verschiedener Grundgrößensysteme – den jeweils zu einem Satz von Einflussgrößen gehörigen Satz von Dimensionslosen ermitteln und die sich eventuell daraus ergebenden Schlussfolgerungen beim weiteren Vorgehen berücksichtigen. Die letzte Überprüfung und

³ Wenn im Folgenden dem allgemeinen Sprachgebrauch entsprechend von Größen oder Einflussgrößen gesprochen wird, sind stets die allgemeinen Maßzahlen derselben gemeint. Dasselbe gilt hinsichtlich der verwendeten Formelsymbole. So bedeutet z. B. das Formelsymbol v die Maßzahl der Geschwindigkeit.

ggf. Korrektur erfolgt dann im Wechselspiel mit der experimentellen Untersuchung.

Grundsätzlich wird man bei der oben skizzierten Vorgehensweise bestrebt sein, zum Zwecke einer Vereinfachung des Problems die Anzahl der zu berücksichtigenden Einflussgrößen so klein wie möglich zu halten, d. h. Größen von gering erachtetem Einfluss zu streichen. Jede Streichung einer Größe impliziert allerdings eine Idealisierung des Problems, und unausweichlich wird Schritt für Schritt der Übergang zu einer Modellvorstellung vollzogen, mit der Folge, dass der letztlich resultierende Satz von Dimensionslosen das reale Problem nur noch approximativ zu beschreiben vermag. In vielen Anwendungsfällen ist aber auch mit einem solchen Ergebnis schon viel gewonnen.

Eine getroffene Wahl von Einflussgrößen ist dann „richtig“, wenn der zur theoretisch-experimentellen Erforschung eines Problems erforderliche Aufwand minimiert wird, ohne dass dabei durch Übervereinfachung diejenigen charakteristischen Züge des Problems, für die man sich vordringlich interessiert, zerstört werden.

2.2 Gewinnung von dimensionslosen Potenzprodukten

Wenn für ein bestimmtes technisch-physikalisches Problem ein Satz von problemrelevanten Einflussgrößen in einem festgelegten Grundgrößensystem gegeben ist, kann die dem Problem zugeordnete Dimensionstafel gemäß **Bild 1.2** aufgestellt werden. Hierbei ergibt sich die Möglichkeit zur Überprüfung der physikalischen Konsistenz der gewählten Einflussgrößen: Die entstehende Dimensionmatrix muss mindestens zwei rangbestimmende Zeilen aufweisen, oder anders ausgedrückt, es darf nicht möglich sein, die Spaltenvektoren der Dimensionmatrix durch eine Linearkombination so zu verbinden, dass eine Spalte mit nur einer einzigen Eintragung entsteht. Wenn diese Forderung nicht erfüllt ist, dann ist diejenige Einflussgröße, die als einzige in einer der Spalten der transformierten Dimensionmatrix einen Eintrag verursacht, als notwendig problemirrelevant zu streichen, oder man muss bei einer Überarbeitung der Liste der Einflussgrößen mindestens eine weitere Größe aufnehmen, die dann die Konsistenz herstellt.

Nach dem Aufstellen der Dimensionstafel mit Dimensionmatrix kann der Übergang zu einem Satz von dimensionslosen Potenzprodukten relativ leicht vollzogen werden; hierzu braucht man nur eine der in der Literatur zu findenden Kalkültechniken anzuwenden. In **Kap. 3.1** wird eine einfache Technik zur schrittweisen Eliminierung der Spalten der Dimensionmatrix nach [3] vorgeführt. Diese Verfahrensweise beinhaltet auch die o. a. Konsistenzprüfung für die Einflussgrößenliste.

Mitunter benötigt man zur Bildung der dimensionslosen Potenzprodukte gar keine formale Kalkültechnik: Wenn z. B. die für ein Problem als kennzeichnend

erachteten algebraischen und/oder Differentialgleichungen bekannt sind, so werden die gesuchten Dimensionslosen bereits bei der physikalischen Diskussion des jeweiligen Problems evident. Doch selbst dann kann es ratsam sein, einen bereits gefundenen Satz von Dimensionslosen durch die Anwendung einer geeigneten Kalkültechnik nochmals zu überprüfen. Die Anzahl der zu gewinnenden dimensionslosen Größen ist nach dem pi-Theorem (vergl. **Kap. 1.3**) durch die Anzahl der Einflussgrößen und durch den Rang der Dimensionsmatrix festgelegt; dagegen hängt die Struktur der zunächst erhaltenen Dimensionslosen von der mehr oder weniger zufällig gewählten Verfahrensweise bei der Ermittlung ab. Nun bilden aber die dimensionslosen Potenzprodukte grundsätzlich ein Fundamentalsystem; deshalb ist es immer möglich, durch nachträgliche Potenzproduktbildung unter den gefundenen dimensionslosen Potenzprodukten zu anderen Potenzprodukten zu gelangen, d. h. der zunächst gewonnene Satz von Dimensionslosen kann nach allgemeinen oder problemspezifischen Gesichtspunkten umgestaltet werden.

In diesem Zusammenhang wird oftmals die Forderung erhoben, dass die Dimensionslosen auf möglichst einfache Weise physikalisch zu interpretieren sind. Zu diesem Zweck strebt man dann – allerdings nicht immer ganz glücklich – solche Dimensionslosen an, die von ihrer Struktur her klassischen Kennzahlen entsprechen, wie z. B. der Reynolds-, Prandl-, Mach- oder Nusseltzahl.

Ein weiterer allgemeiner Gestaltungsgesichtspunkt besteht darin /3/, dass man versucht, die Dimensionslosen so zu strukturieren, dass einerseits Größen mit sehr hohem Einflussgewicht und andererseits Größen mit nur relativ geringem Einflussgewicht entstehen. Gelingt dies, dann kann der betreffende physikalische Sachverhalt in seinen wesentlichen Zügen mit einer verringerten Anzahl von essentiellen Dimensionslosen beschrieben werden; die restlichen Dimensionslosen haben dann nur noch sekundäre Bedeutung und sind eventuell unter gewissen Randbedingungen sogar ganz zu vernachlässigen. Hierzu ist allerdings zu bemerken, dass das Einflussgewicht von Dimensionslosen in der Regel nur dann sicher beurteilt werden kann, wenn bereits experimentelle Ergebnisse zur Verfügung stehen.

Die dimensionslose Beschreibung von technisch-physikalischen Sachverhalten ist invariant gegenüber jedem Wechsel des Grundgrößensystems. Dennoch kann es vorteilhaft sein, die dimensionsanalytische Diskussion eines bestimmten physikalischen Problems vor dem Hintergrund von verschiedenen Grundgrößensystemen durchzuführen. Bei einem Wechsel zu einem Grundgrößensystem mit einer größeren Anzahl von Grundgrößenarten kommt es nämlich mitunter vor, dass sich der Rang der Dimensionsmatrix erhöht, ohne dass die Anzahl der problemrelevanten Einflussgrößen vermehrt werden muss. Dann führt die Dimensionsanalyse in dem neuen Grundgrößensystem zu einer verringerten Anzahl von Dimensionslosen und somit zu einer rationelleren Beschreibung des jeweiligen Sachverhaltes.

Auf solche glücklichen Fälle wird man allerdings bei der Behandlung von technisch-physikalischen Problemstellungen – ausgehend von dem häufig verwendeten $\{M(\text{Masse}), L(\text{Länge}), T(\text{Zeit}), \Theta(\text{Temperatur})\}$ -System oder einer Unter- auswahl desselben – nur selten stoßen, denn: Mit jeder Vermehrung der Anzahl der Grundgrößenarten um Eins muss damit gerechnet werden, dass eine neue Dimensionskonstante ins Spiel kommt, die im allgemeinen auch in das betreffende Problem eingeht und die deshalb die Anzahl der Einflussgrößen ebenfalls um Eins erhöht. Bei solcher Sachlage eröffnet der Übergang zu einem Grundgrößen- system mit einer größeren Anzahl von Grundgrößenarten keine Aussicht auf eine Verminderung der dimensionslosen Größen. Die oben erwähnte günstige Si- tuation tritt nur im speziellen auf, wenn man infolge ausreichender physikali- scher Einsicht in ein anstehendes Problem entscheiden kann, dass eine in Be- tracht kommende Dimensionskonstante problemirrelevant ist und deshalb unbe- rücksichtigt bleiben kann.

2.3 Berücksichtigung veränderlicher Stoffgrößen ⁴

Die in einen physikalischen Sachverhalt eingehenden Stoffgrößen, wie z. B. die Wärmeleitfähigkeit oder die Viskosität, sind – sofern sie als konstant angesehen werden können – als dimensionsbehaftete Stoffkonstanten in die Liste der Ein- flussgrößen aufzunehmen. Bei dem Übergang auf einen Satz von dimensionslosen Größen und bei der Ermittlung von Beziehungen zwischen diesen Größen sind keine Komplikationen zu erwarten, die in besonderer Weise auf die Stoffgrößen zurückzuführen wären.

Das kann sich aber ändern, wenn für eine Stoffgröße s eine Abhängigkeit $s(p)$ von einer anderen Zustandsvariablen p berücksichtigt werden muss, z. B. die Ab- hängigkeit der dynamischen Viskosität einer Flüssigkeit von der Temperatur. Die hier ins Spiel kommenden Stofffunktionen sind im Allgemeinen von der Form

$$s = f(p, c_1, c_2, \dots, c_n) \quad (2.-1)$$

wobei die c_i Zahlenwerte von dimensionsbehafteten Stoffkonstanten bezeichnen, die bestimmten theoretischen Vorstellungen entsprechen oder rein phänomenolo- gischer Natur sind. Gegenüber dem Fall der konstanten Stoffgrößen müssen jetzt zusätzliche geeignet gewählte Bestimmungselemente der Stofffunktion (2.-1) in die Liste der Einflussgrößen aufgenommen werden. Dadurch erhöht sich zwangs- läufig auch die Anzahl der Dimensionslosen, die dem jeweiligen physikalischen Problem zuzuordnen sind. Außerdem wird die mathematische Struktur der Be- ziehungen zwischen den Dimensionslosen noch durch die Stofffunktion selbst be- einflusst.

Die Festlegung der kennzeichnenden Bestimmungselemente einer Stofffunktion erfolgt zweckmäßig anhand ihrer dimensionslosen Formulierung. In den Anwen- dungen hat man es nun sehr häufig mit empirisch ermittelten Stofffunktionen zu

⁴ Die Ausführungen dieses Kapitels wurden aus Pawlowski /2/ übernommen.

tun, die zur bequemen Handhabung durch geeignete Funktionsansätze approximiert werden. Solche Stofffunktionen können auf vielfache Weise in eine dimensionslose Darstellung überführt werden. Nach Pawlowski /2/ ist eine der wichtigsten der hier in Betracht kommenden Methoden folgendermaßen zu kennzeichnen: Innerhalb des Definitionsbereiches der Funktion $s(p)$ in Gleichung (2.-1) wird ein Wert p^* als Bezugspunkt ausgewählt. Unter Verwendung des Stofffunktionswertes $s(p^*)$ und der Ableitung $\partial s / \partial p$ an der Stelle p^* lässt sich dann über die Transformationsbeziehungen

$$u = \left(\frac{\partial \ln s}{\partial p} \right)_{p^*} (p - p^*) \quad \text{und} \quad w = \frac{s}{s(p^*)} \quad (2.-2)$$

eine dimensionslose Darstellung der Stofffunktion $s(p)$

$$w = \Phi(u) \quad (2.-3)$$

gewinnen, die den Normierungsbedingungen $\Phi(0) = \Phi'(0) = 1$ genügt.

Diese Darstellung, die Pawlowski /2/ als Standarddarstellung der Stofffunktion $s(p)$ bezeichnet, liefert die Stofffunktionsparameter, die in die Liste der Einflussgrößen aufzunehmen sind. Hierunter fällt im allgemeinen auch der Bezugspunkt p^* , dessen Wahl natürlich nicht die Funktion $s(p)$, wohl aber die Φ -Funktion in Gleichung (2.-3) beeinflusst.

Pawlowski /2/ zeigt nun, dass es spezielle Funktionen

$$s = s(p) = \begin{cases} (c_1 + c_2 p)^\gamma \\ c_1 \exp(c_2 p) \end{cases} \quad (2.-4)$$

mit beliebigen Konstanten c_1, c_2 gibt, die durch die Transformationsbeziehungen (2.-2) in *bezugsinvariante* Standarddarstellungen

$$\frac{s}{s(p^*)} = \begin{cases} \left(1 + \frac{p - p^*}{c_1 / c_2 + p^*} \right)^\gamma \\ \exp \left[c_2 (p - p^*) \right] \end{cases} \quad (2.-5)$$

übergehen, die von der Wahl des Bezugspunktes p^* unabhängig sind.

In vielen Fällen gelingt es, empirisch ermittelte Stofffunktionen durch die Funktionen (2.-4) befriedigend zu approximieren.

Die bezugsinvariante Darstellung bietet Vorteile:

Erstens - Der Bezugspunkt p^* ist problemirrelevant und braucht deshalb nicht in die Liste der Einflussgrößen des jeweils betreffenden physikalischen Problems aufgenommen zu werden. Soweit es allein um die Stoffwertbeschreibung geht, erübrigt sich damit die Absolutfixierung der Zustandsvariablen p , die sonst über die Einführung eines geeigneten prozessbedingten Wertes p_0 in die Liste der Einflussgrößen vorgenommen werden müsste.

Zweitens - Der problemirrelevante Bezugspunkt kann willkürlich und deshalb – falls es sich bei der Beschreibung eines bestimmten technisch-physikalischen

Sachverhaltes als vorteilhaft erweisen sollte – auch uneingeschränkt prozessbezogen gewählt werden. So kann man z. B. bei der Behandlung eines Wärmeübergangsprozesses mit temperaturabhängiger Viskosität eine charakteristische Wandtemperatur oder eine andere prozessrelevante Temperatur als Bezugstemperatur für die Viskosität einführen, ohne dass die Gültigkeit einer etwa resultierenden dimensionslosen Beziehung auf bestimmte Werte dieser Temperatur beschränkt wäre. Die bezugsinvariante Approximation führt oftmals gegenüber anderen Stofffunktionsapproximationen zu einer kleineren Anzahl von Dimensionslosen.

Nach Vorstehendem liest man aus den Standarddarstellungen (2.-5) die kennzeichnenden Bestimmungselemente

$$s(p^*), c_1/c_2 \text{ und } \gamma \quad \text{bzw.} \quad s(p^*) \text{ und } c_2 \quad (2.-6)$$

ab, die im Falle einer bezugsinvarianten Stoffwertapproximation in eine Einflussgrößenliste aufzunehmen wären.

2.4 Funktionsansätze für dimensionslose Beziehungen

In den ingenieurwissenschaftlichen Anwendungen werden experimentell oder durch physikalische Überlegung ermittelte Beziehungen zwischen dimensionslosen Größen oftmals mit Erfolg durch Potenzproduktansätze der Form

$$\Pi_1^{a_1} \Pi_2^{a_2} \dots \Pi_k^{a_k} \dots \Pi_n^{a_n} = konst \quad (2.-7)$$

oder

$$(\Pi_1 + c_1)^{a_1} \dots (\Pi_k + c_k)^{a_k} \dots (\Pi_n + c_n)^{a_n} = konst \quad (2.-8)$$

approximiert. Man denke z. B. an den bekannten von Nusselt eingeführten Ansatz

$$Nu = konst Re^m Pr^n, \quad (2.-9)$$

der sich zur Beschreibung des stationären Wärmeüberganges bei erzwungener Konvektion bewährt hat.

Dieser Sachverhalt steht aber in keinerlei formal-logischem Zusammenhang mit den dimensionstheoretischen Grundlagen; die obigen Ansätze sind lediglich approximationstechnisch günstig und außerdem leicht zu handhaben. Wenn man für einen physikalischen Sachverhalt, etwa aus theoretischen Erwägungen heraus, eine bestimmte mathematische Struktur des beschreibenden dimensionslosen Zusammenhanges vermuten kann, dann wird man dieses Wissen zur Auswahl eines besonders geeigneten Approximationsansatzes nutzen und nicht auf die o. g. Ansätze zurückgreifen. Dabei kann man mit den dimensionslosen Größen wie mit Zahlen mathematisch operieren, d. h. man kann sie auch als Argument von mathematischen Funktionen (z. B. von Exponential- und trigonometrischen Funktionen) verwenden.

3 BEISPIELE ZUR DIMENSIONSANALYSE

In diesem Kapitel werden einfache, aber auch umfassendere Beispiele zur Dimensionsanalyse behandelt, die die universelle Anwendungsmöglichkeit dieser Methode verdeutlichen sollen. Dabei wird in der Regel davon ausgegangen, dass bereits eine hinreichend vollständige Liste von Einflussgrößen für den zu behandelnden technisch-physikalischen Sachverhalt vorliegt.

3.1 Stationäre Rohrströmung

3.1.1 Strömungsform

Bei der stationären Rohrströmung sind die *laminare* und die *turbulente* Strömungsform zu unterscheiden (s. **Bild 3.1**), wobei sich die Bezeichnung „stationär“ bei der Letzteren auf die (von lokalen Geschwindigkeitsschwankungen überlagerte) Grundgeschwindigkeit der Strömung bezieht.

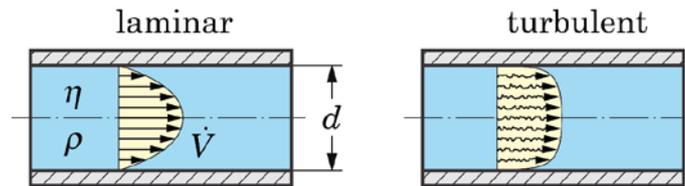


Bild 3.1: Strömungsformen bei voll ausgebildeter Rohrströmung

Zur Untersuchung der Bedingungen, unter denen die eine oder die andere Strömungsform vorliegt, denke man sich einen Versuchsstand, auf dem Rohre mit unterschiedlichen Durchmessern mit ausgewählten Fluiden bei frei einstellbaren Volumenströmen durchströmt werden können. In jedem Versuchslauf sei in einiger Entfernung vom Rohreinlauf durch Beobachtung feststellbar, ob die laminare oder die voll turbulente Strömungsform vorliegt. Die zu diesem Gedankenexperiment zu erwartenden Versuchsergebnisse lassen sich wie folgt skizzieren.

Erstens) In einer Versuchsserie mit veränderlichem Volumenstrom \dot{V} und sonst konstanten Bedingungen lassen sich zwei charakteristische Grenzwerte \dot{V}_{lam} und \dot{V}_{turb} ermitteln, mit den Bedeutungen

$$\frac{\dot{V} < \dot{V}_{lam}}{\dot{V} > \dot{V}_{turb}} \left| \begin{array}{l} \text{Die Strömung ist eindeutig laminar} \\ \text{Die Strömung ist eindeutig turbulent} \end{array} \right. \quad (3.1)$$

Für Volumenströme zwischen diesen beiden Grenzwerten ist es in der Regel nicht möglich, die Strömung eindeutig einer der beiden Kategorien zuzuordnen.

Zweitens) Bei Versuchen mit Rohren verschiedener Durchmesser und mit Fluiden von unterschiedlicher Dichte und dynamischer Zähigkeit stellt man fest, dass sich die Volumenstromgrenzwerte \dot{V}_{lam} und \dot{V}_{turb} verändern, d. h. es gelten Einflussgrößenzusammenhänge der Form

$$\begin{aligned}\dot{V}_{lam} &= f'(\rho, \eta, d) \\ \dot{V}_{turb} &= f''(\rho, \eta, d)\end{aligned}\tag{3.-2}$$

$\dot{V}_{lam}, \dot{V}_{turb}$ Volumenstrom (unterer bzw. oberer Wert)
 ρ Dichte
 η Dynamische Viskosität
 d Rohrdurchmesser

Die zum Übergang auf dimensionslose Zusammenhänge durchzuführende Dimensionsanalyse erfolgt zweckmäßig in einem $\{M, L, T\}$ -System. Mit dem Volumenstromgrenzwert \dot{V}_{lam} (mit \dot{V}_{turb} wäre analog zu verfahren) erhält man zunächst die in **Bild 3.2** links stehende Dimensionstafel.

①	M	L	T
\dot{V}_{lam}	0	3	-1
ρ	1	-3	0
η	1	-1	-1
d	0	1	0

②	M	L
\dot{V}_{lam}/η	-1	4
ρ	1	-3
d	0	1

③	M
$\dot{V}_{lam}/\eta d^4$	-1
ρd^3	1

④
$\dot{V}_{lam}\rho/d\eta$

Bild 3.2: Dimensionstafel ① zu Gleichung (3.-2) und Spalteneliminierung

Der Übergang zu einem dimensionslosen Zusammenhang erfolgt hier (und analog bei allen weiteren Beispielen) durch die in /3/ vorgeführte schrittweise Eliminierung der Spalten der Dimensionsmatrix.

In der T -Spalte der Tafel ① (**Bild 3.2**) verursachen nur \dot{V}_{lam} und η einen Eintrag, so dass die Kombination dieser beiden Größen sofort zur Eliminierung der T -Spalte und damit zur Tafel ② führt. Durch Kombination der ersten beiden Zeilen in dieser Tafel mit Potenzen von d wird die L -Spalte eliminiert, so dass nun Tafel ③ mit nur zwei Einträgen in der M -Spalte verbleibt. Die Eliminierung der M -Spalte liefert schließlich den dimensionslosen Zusammenhang

$$\underbrace{\frac{\dot{V}_{lam}\rho}{d\eta}}_{Re_{lam}} = konst' \quad \text{..und analog hierzu} \quad \underbrace{\frac{\dot{V}_{turb}\rho}{d\eta}}_{Re_{turb}} = konst''.\tag{3.-3}$$

Die Anzahl der gefundenen Dimensionslosen (beide sind der Struktur nach Reynoldszahlen⁵⁾) ist hier gleich der Anzahl der Einflussgrößen vermindert um die der Grundgrößen (4-3=1). Das ist zwar häufig aber nicht immer so. Bei der in **Bild 3.2** dargestellten Vorgehensweise zur Eliminierung der Spalten der Dimensionsmatrix braucht man sich jedoch nicht um die korrekte Anzahl der Dimensionslosen zu sorgen, da diese von sich aus gefunden wird.

⁵⁾ Wegen $\dot{V} \sim wd^2$ (w ist die mittlere Strömungsgeschwindigkeit) könnte man auch in die geläufigere Form der Reynoldszahl $Re = wd\rho/\eta$ umschreiben, wovon natürlich der Wert der Konstanten in Gleichung (3.-3) betroffen wäre.

Mit den vorstehend erhaltenen beiden Dimensionslosen lässt sich Gleichung (3.-1) verallgemeinern in

$Re < Re_{lam}$	Die Strömung ist eindeutig laminar
$Re > Re_{turb}$	Die Strömung ist eindeutig turbulent

Damit ist nach einer einfachen Dimensionsanalyse die Frage nach den Bedingungen, unter denen eine laminare oder eine voll turbulente Rohrströmung vorliegt, beantwortet. Zur Bestimmung der beiden Konstanten in Gleichung (3.-3) reicht prinzipiell ein Versuchslauf (Volumenstrom \dot{V} variabel) mit einem Rohr (Durchmesser d) und einem Fluid (Dichte ρ , dynamische Viskosität η), bei dem die Volumenströme \dot{V}_{lam} und \dot{V}_{turb} ermittelt werden.

Anmerkung: In unterschiedlichen Versuchseinrichtungen werden verschiedene Werte Re_{lam} , Re_{turb} festgestellt, woraus zu schließen ist, dass die Einflussgrößenliste (3.-2) nicht vollständig ist. Für Rohrströmungen unter technischen Bedingungen wird in der Literatur für Re_{lam} häufig ein Wert von ungefähr 2300 genannt. Angaben für Re_{turb} sind seltener und unschärfer, sie liegen bei 3000 bzw. 3500 und höher.

3.1.2 Druckabfall in Strömungsrichtung

Bei der Rohrströmung (laminar oder turbulent) entsteht infolge der Scherströmung in Wandnähe generell ein Druckabfall $\Delta p/\Delta x$ in Strömungsrichtung. In **Bild 3.3** sind die für den turbulenten Fall als wesentlich zu erachtenden Einflussgrößen eingetragen.

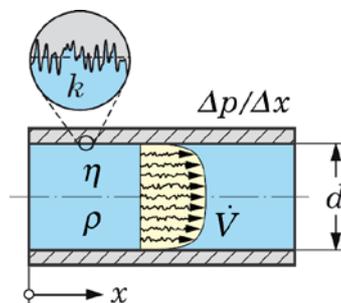


Bild 3.3: Zum Druckverlust bei ausgebildeter turbulenter Rohrströmung

Hiernach gilt für den Druckgradienten $\Delta p/\Delta x$ die nachstehende Einflussgrößenliste

$$\Delta p/\Delta x = f(\dot{V}, d, k, \eta, \rho) . \quad (3.-4)$$

$\Delta p/\Delta x$	Druckgradient in Strömungsrichtung
\dot{V}	Volumenstrom
d	Rohrdurchmesser
k	Mittlere Wandrauigkeit
η	Dynamische Viskosität
ρ	Dichte

①	<i>M</i>	<i>L</i>	<i>T</i>
$\Delta p/\Delta x$	1	-2	-2
\dot{V}	0	3	-1
<i>d</i>	0	1	0
<i>k</i>	0	1	0
η	1	-1	-1
ρ	1	-3	0

②	<i>M</i>	<i>L</i>
$(\Delta p/\Delta x)/\eta^2$	-1	0
\dot{V}/η	-1	4
<i>d</i>	0	1
<i>k</i>	0	1
ρ	1	-3

③	<i>M</i>
$(\Delta p/\Delta x)/\eta^2$	-1
$\dot{V}/\eta d^4$	-1
<i>k/d</i>	0
ρd^3	1

④
$(\Delta p/\Delta x)\rho d^3/\eta^2$
$\dot{V}\rho/\eta d$
<i>k/d</i>

Bild 3.4: Dimensionstafel ① zu Gleichung (3.-4) im $\{M, L, T\}$ -System und Eliminierung der Spaltenvektoren

Im $\{M, L, T\}$ -System gehört hierzu die Dimensionstafel ① in **Bild 3.4**. Nach Eliminierung der Spaltenvektoren erhält man mit der Potenzproduktumwandlung

$$\frac{\Delta p/\Delta x \rho d^3}{\eta^2} \times \left(\frac{\dot{V} \rho}{d \eta} \right)^{-2} = \frac{\Delta p/\Delta x d^5}{\rho \dot{V}^2} \quad (3.-5)$$

den dimensionslosen Zusammenhang

$$\frac{\Delta p/\Delta x d^5}{\rho \dot{V}^2} = F \left(\frac{\dot{V} \rho}{d \eta}, \frac{k}{d} \right). \quad (3.-6)$$

Die Dimensionslose auf der linken Seite kann wegen $\dot{V} = w d^2 \pi/4$ (*w* ist die mittlere Strömungsgeschwindigkeit) umgeschrieben werden in

$$\frac{\Delta p/\Delta x d}{\rho w^2} \frac{4}{\pi}, \quad (3.-7)$$

woraus kenntlich wird, dass es sich bei dieser Größe bis auf den Faktor $\pi/2$ um die aus der Strömungsmechanik bekannte dimensionslose Rohrreibungszahl

$$\lambda = 2 \frac{\Delta p/\Delta x d}{\rho w^2} \quad (3.-8)$$

handelt. Die erste Dimensionslose in der Argumentklammer, die der Struktur nach eine Reynoldszahl darstellt, kann analog in die bekanntere Form

$$\text{Re} = \frac{w d \rho}{\eta} \quad (3.-9)$$

umgeschrieben werden.

Mit den beiden vorstehenden Umformungen geht der dimensionslose Zusammenhang in Gleichung (3.-6) in die gebräuchlichere allgemeine Form des sog. *Rohrreibungsgesetzes*

$$\lambda = G\left(\text{Re}, \frac{k}{d}\right) \quad (3.-10)$$

über. Für diesen dimensionslosen Zusammenhang sind verschiedene experimentell ermittelte Gleichungsformulierungen bekannt geworden, so z. B. das Gesetz nach Colebrook

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 1,74 - 2 \lg\left(2 \frac{k}{d} + \frac{18,7}{\text{Re} \sqrt{\lambda}}\right) \quad (3.-11)$$

für den Übergangsbereich laminar-turbulent. Die graphische Darstellung dieser Gleichungen (siehe z. B. **Bild 3.5**) bezeichnet man üblicherweise als „Moody-Diagramm“.

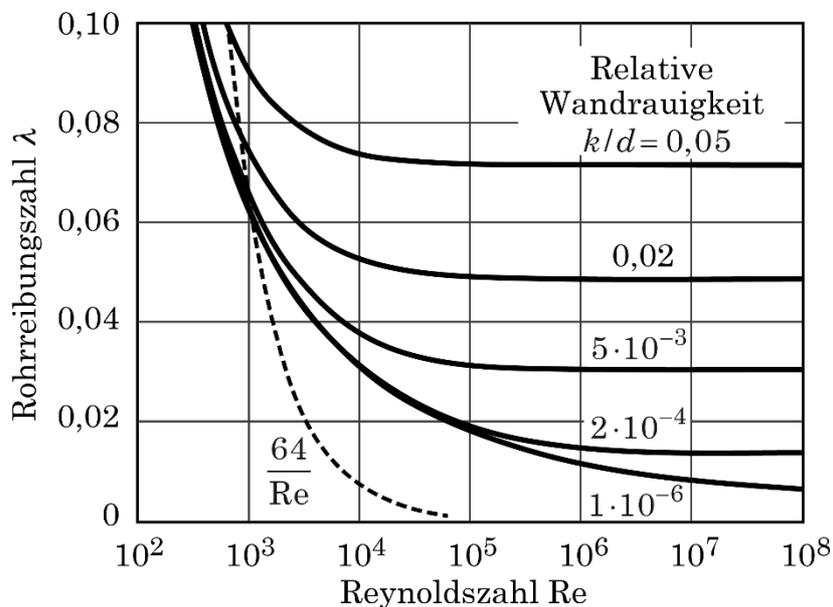


Bild 3.5: Rohrreibungsgesetz nach Colebrook

Zurückkehrend zur Gleichung (3.-6) kann diese mit der Potenzproduktwandlung

$$\frac{\Delta p / \Delta x d^5}{\rho \dot{V}^2} \times \frac{\dot{V} \rho}{d \eta} = \frac{\Delta p / \Delta x d^4}{\eta \dot{V}}, \quad (3.-12)$$

bei der sich die Dichte heraushebt, in die gleichwertige Form

$$\frac{\Delta p / \Delta x d^4}{\eta \dot{V}} = F^* \left(\frac{\dot{V} \rho}{d \eta}, \frac{k}{d} \right) \quad (3.-13)$$

umgeschrieben werden, die für verschwindende Werte der Argumentvariablen in das bekannte laminare Rohrreibungsgesetz nach Hagen-Poiseuille übergeht,

$$\frac{\Delta p / \Delta x d^4}{\eta \dot{V}} = konst, \quad (3.-14)$$

mit einer zunächst unbekanntem Konstante.

Dieser sehr einfache Grenzfall, der einer ungestörten laminaren Strömung im glatten Rohr entspricht, lässt sich auch analytisch behandeln. Dabei ergibt sich die o. g. Konstante rechnerisch zu $128/\pi$. Das vollständige Gesetz nach Hagen-Poiseuille lautet folglich

$$\frac{\Delta p / \Delta x d^4}{\eta \dot{V}} = \frac{128}{\pi} . \quad (3.-15)$$

Im strömungstechnischen Schrifttum wird diese Gleichung mit $\dot{V} = d^2(\pi/4)w$ und durch eine (im Prinzip belanglose und deshalb fragwürdige) Division der linken und der rechten Seite mit $2\text{Re} = 2wd\rho/\eta$ umgeschrieben in die Form

$$\lambda = \frac{64}{\text{Re}} , \quad (3.-16)$$

die nun, analog zum turbulenten Fall, auch für den laminaren Fall eine Rohrreibungszahl in Abhängigkeit der Reynoldszahl ausweist. Dementsprechend wird diese Gleichung häufig in Moody-Diagrammen zusammen mit Rohrreibungsgesetzen für den turbulenten Fall graphisch dargestellt (so wie in **Bild 3.5** demonstriert). Die Gleichung (3.-16) erweckt allerdings nur infolge ihrer fragwürdigen Entstehung den Anschein, dass der Druckverlust bei laminarer Strömung von der Reynoldszahl abhängig ist, was mit Blick auf die Ausgangsgleichung (3.-15) tatsächlich nicht der Fall ist (die Dichte kommt in dieser Gleichung nicht vor). So gesehen stellt die (mathematisch zwar korrekte) Gleichung (3.-16) gewissermaßen eine Verfälschung des Gesetzes nach Hagen-Poiseuille dar.

Das vorstehend behandelte Rohrreibungsgesetz nach Hagen-Poiseuille wurde als Grenzfall „turbulenzfreie Strömung im glatten Rohr“ aus Gleichung (3.-13) gefolgert. Dieses Gesetz lässt sich auch auf einem anderen Wege gewinnen, der als ein Beispiel dafür dienen möge, dass es manchmal nützlich sein kann, ein Problem vor dem Hintergrund von verschiedenen Grundgrößensystemen zu untersuchen. Die Einflussgrößenliste (3.-4) wird zunächst für das hier zu behandelnde Problem durch Streichung der mittleren Wandrauigkeit modifiziert in

$$\Delta p / \Delta x = f(\dot{V}, d, \eta, \rho) . \quad (3.-17)$$

Für diese Einflussgrößenliste wird nachfolgend eine Dimensionsanalyse in einem $\{F, M, L, T\}$ -System durchgeführt, in dem neben der Masse auch die Kraft als Grundgröße verwendet wird. Die nun um eine größere Anzahl der Grundgrößen mag die Aussicht auf eine entsprechend um eine kleinere Anzahl der gesuchten Dimensionslosen eröffnen. Dabei ist allerdings zu berücksichtigen, dass Masse und Kraft über das Newton'sche Grundgesetz verbunden sind, das jetzt in der Form $F = ma/g_0$ geschrieben werden muss. Die hierin auftretende Dimensionskonstante g_0 mit der Dimension $[g_0] = MLT^{-2}F^{-1}$ ist im $\{F, M, L, T\}$ -System grundsätzlich als Einflussgröße in Gleichung (3.-17) zu berücksichtigen. Neben der Anzahl der Grundgrößen nimmt also auch die Anzahl der Einflussgrößen um

eins zu, wodurch die Hoffnung auf eine kleinere Anzahl von Dimensionslosen entfällt. Etwas anderes gilt nur dann, wenn man durch physikalische Überlegung entscheiden kann, dass die Konstante g_0 problemirrelevant ist.

Letzteres ist hier tatsächlich der Fall. Die Strömung nach Hagen-Poiseuille ist nämlich als laminare Strömung allein durch Druck- und Zähigkeitskräfte geprägt, und nicht zusätzlich durch Trägheitskräfte. Deshalb ist das Newton'sche Grundgesetz für diese Form der Strömung problemirrelevant. Folglich braucht auch die in diesem Gesetz auftretende Dimensionskonstante g_0 nicht in die Einflussgrößenliste (3.-17) aufgenommen zu werden. Hiernach erhält man im $\{F, M, L, T\}$ -System die Dimensionstafel ① in **Bild 3.6**.

①	F	M	L	T
$\Delta p/\Delta x$	1	0	-3	0
\dot{V}	0	0	3	-1
d	0	0	1	0
η	1	0	-2	1
ρ	0	1	-3	0

②	F	L
$\Delta p/\Delta x$	1	-3
$\dot{V}\eta$	1	1
d	0	1

③	F
$\Delta p/\Delta x d^3$	1
$\dot{V}\eta/d$	1

④
$\frac{\Delta p/\Delta x d^4}{\dot{V}\eta}$

Bild 3.6: Dimensionstafel ① zu Gleichung (3.-17) im $\{F, M, L, T\}$ -System und Eliminierung der Spaltenvektoren

Eine Inspektion der Dimensionsmatrix in ① zeigt zunächst, dass die gewählte Einflussgrößenliste nicht plausibel ist. In der M -Spalte wird nämlich allein durch die Dichte ρ ein Eintrag verursacht, sodass diese Spalte nicht eliminiert werden kann. Deshalb ist die Dichte als problemirrelevant anzusehen und folglich aus der vorstehenden Dimensionstafel zu streichen. Die sukzessive Eliminierung der verkürzten Spalten führt dann auf die dimensionslose Beziehung

$$\frac{\Delta p/\Delta x d^4}{\eta \dot{V}} = konst , \quad (3.-18)$$

die mit der als Grenzfall erhaltenen Gleichung (3.-14) übereinstimmt.

3.1.3 Wärmeübergang

Betrachtet wird der Wärmeübergang in einem Rohrabschnitt mit ausgebildeter (im ersten Schritt) turbulenter Strömung zwischen dem Strömungsmedium und der Rohrwand (s. **Bild 3.7**).

Mit den im Bild eingetragenen Einflussgrößen gilt für den mit der Rohrwand ausgetauschten Wärmestrom

$$\dot{Q} = f(\Delta T, w_m, \eta, \rho, \lambda, c_p, \Delta p, d, l/d) . \quad (3.-19)$$

$$\begin{array}{ll} \dot{Q} & \text{Wärmestrom} \\ \Delta T & \text{Temperaturdifferenz } \Delta T = T_{0m} - T_{Wm} \end{array}$$

①	M	L	T	Θ
\dot{Q}	1	2	-3	0
ΔT	0	0	0	1
w_m	0	1	-1	0
η	1	-1	-1	0
ρ	1	-3	0	0
λ	1	1	-3	-1
c_p	0	2	-2	-1
Δp	1	-1	-2	0
d	0	1	0	0

②	M	L	T
\dot{Q}	1	2	-3
$\Delta T c_p$	0	2	-2
w_m	0	1	-1
η	1	-1	-1
ρ	1	-3	0
λ / c_p	1	-1	-1
Δp	1	-1	-2
d	0	1	0

③	M	L
\dot{Q} / w_m^3	1	-1
$\Delta T c_p / w_m^2$	0	0
η / w_m	1	-2
ρ	1	-3
$\lambda / c_p w_m$	1	-2
$\Delta p / w_m^2$	1	-3
d	0	1

④	M
$\dot{Q} d / w_m^3$	1
$\Delta T c_p / w_m^2$	0
$\eta d^2 / w_m$	1
ρd^3	1
$\lambda d^2 / c_p w_m$	1
$\Delta p d^3 / w_m^2$	1

⑤
$\dot{Q} / w_m^3 \rho d^2$
$\Delta T c_p / w_m^2$
$\eta / w_m \rho d$
$\lambda / c_p w_m \rho d$
$\Delta p / w_m^2 \rho$

Bild 3.8: Dimensionstafel ① zu Gleichung (3.-19) und Eliminierung der Spaltenvektoren

Die ersten beiden Dimensionslosen in der Argumentklammer der Gleichung (3.-21) sind die Reynoldszahl Re und die Prandlzahl Pr . Die dritte Dimensionslose, die gemäß den ausführlichen Ausführungen in **Kap. 3.3** mit der Dissipation von kinetischer Strömungsenergie in Zusammenhang steht, dürfte hier aus Kontinuitätsgründen (konstante Geschwindigkeit über der Rohrlänge) keine Rolle spielen. Die vierte Dimensionslose hingegen ist die Rohrreibungszahl λ_R (vergl. **Kap. 3.1.2**), woraus kenntlich wird, dass sie sich auf die Dissipation von Druckarbeit bezieht.

Somit kann schließlich geschrieben werden

$$Nu = G(Re, Pr, \lambda_R, l/d) . \quad (3.-22)$$

Im Schrifttum findet man für diese Beziehung z. B. den durch empirische Untersuchungen ermittelten Gleichungsansatz

$$Nu = \frac{\lambda_R (Re - 1000) Pr}{8} \left(1 + (d/l)^{2/3} \right) \cdot \frac{1}{1 + 12,7 \sqrt{\frac{\lambda_R}{8}} (Pr^{2/3} - 1)} . \quad (3.-23)$$

Unter Verwendung des von Nusselt eingeführten Funktionsansatzes (vergl. **Kap. 2.4**) wurde auch die einfachere Formulierung

$$\text{Nu} = 0,024 \text{Re}^{0,786} \text{Pr}^{0,45} \left(1 + (d/l)^{2/3}\right) \quad (3.-24)$$

aufgestellt, die die Dissipation von Druckarbeit unberücksichtigt lässt.

Aus Gleichung (3.-22) lässt sich in wenigen Schritten ein dimensionsloser Zusammenhang für den Wärmeübergang im laminar durchströmten Rohr gewinnen. Zunächst wird die Rohrreibungszahl λ_R , die nur für turbulente Strömungen definiert ist (vergl. **Kap. 3.1.2**), durch eine dimensionstheoretisch gleichwertige etwas anders formulierte dimensionslose Druckdifferenz ersetzt, die über die Potenzproduktumwandlung

$$\lambda_R \times \text{Re} = \frac{\Delta p d}{l w_m^2 \rho} \times \frac{w_m \rho d}{\eta} = \frac{\Delta p d^2}{l w_m \eta} \quad (3.-25)$$

entsteht. Wenn man hierin noch die mittlere Strömungsgeschwindigkeit über $w_m = \dot{V} / (d^2 \pi / 4)$ durch den Volumenstrom ausdrückt, geht diese neue Dimensionslose über in die Form $(\Delta p d^4 / l \dot{V} \eta) \pi / 4$, die bis auf den Faktor $\pi / 4$ übereinstimmt mit der Dimensionslosen auf der linken Seite des Rohrreibungsgesetzes nach Hagen-Poiseuille in Gleichung (3.-15). Gemäß diesem Gesetz wird diese Dimensionslose bei laminarer Strömung zu einer Konstanten. Da dann auch die Reynoldszahl ausscheidet (keine Trägheitskräfte), geht der dimensionslose Zusammenhang nach Gleichung (3.-22) für den laminaren Fall über in

$$\text{Nu}_{lam} = G'(\text{Pr}, l/d) . \quad (3.-26)$$

Historische Anmerkung: Bei der vorstehend behandelten Rohrströmung erfolgt die Wärmeübertragung durch „erzwungene Konvektion“, d. h. die mit der Rohrwand ausgetauschte Wärme wird in Form von innerer Energie durch einen erzwungenen Stoffstrom zu- oder abgeführt. Früher nahm man an, dass der Wärmeübergang in Verbrennungsmotoren grundsätzlich nach demselben Mechanismus abläuft. Deshalb haben verschiedene Autoren versucht, auf der Basis der Gleichung (3.-24) eine Wärmeübergangsgleichung für Verbrennungsmotoren zu entwickeln. Dabei sah man die Reynoldszahl als während des motorischen Prozesses in Abhängigkeit von Druck und Temperatur veränderlich an. Zudem wurde für die inkludierte Geschwindigkeit ein Ansatz eingeführt, der neben dem Einfluss der mittleren Kolbengeschwindigkeit auch einen der Verbrennung berücksichtigen sollte. Aus heutiger Sicht konnte dieses Vorgehen nur zu physikalisch inkorrekten groben Gebrauchsformeln führen, weil die Bedeutung des hochgradig instationären Ablaufes des Arbeitsprozesses in Verbrennungsmotoren verkannt wurde. Immerhin haben sich diese einfachen Gleichungsansätze bei der Entwicklung von frühen Computerprogrammen zur praxisorientierten Berechnung des motorischen Arbeitsprozesses als nützlich erwiesen, weil sie rein mathematisch gesehen eine grobe Berücksichtigung des Wandwärmeübergangs ermöglichten. Hinzu kommt, dass der Einfluss eines fehlerhaft berechneten Wärmeübergangs

mitunter gar nicht so groß ist, als dass Aussagen zur Arbeit und zum Wirkungsgrad des motorischen Arbeitsprozesses inakzeptabel verfälscht würden.

3.2 Reibungsmoment bei der Strömung zwischen rotierenden Zylindern (Taylor-Couette-Strömung)

Als Taylor-Couette-Strömung bezeichnet man die inkompressible viskose Strömung im Ringspalt zwischen zwei koaxialen Zylindern (s. **Bild 3.9**), von denen im Allgemeinen sowohl der innere als auch der äußere Zylinder rotiert. Um den Bewegungszustand aufrechtzuerhalten, müssen die an der Außenseite des inneren und die an der Innenseite des äußeren Zylinders angreifenden Scherkräfte der Strömung durch äußere Drehmomente ausgeglichen werden. Das in der Skizze angedeutete einfache Geschwindigkeitsprofil ist nur bei geringen Rotationsgeschwindigkeiten zu erwarten.

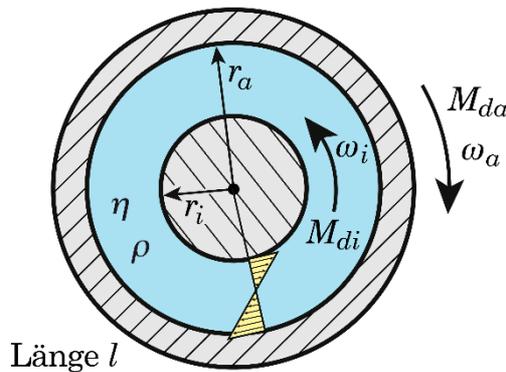


Bild 3.9: Strömung zwischen rotierenden Zylindern

Es ist davon auszugehen, dass beide Drehmomentwerte M_{di} und M_{da} von denselben Einflussgrößen abhängen. Deshalb wird die Einflussgrößenliste allgemein mit dem Drehmoment M_d formuliert:

$$\frac{M_d}{l} = f\left(\omega_i, \frac{\omega_a}{\omega_i}, \eta, \rho, r_i, \frac{r_a}{r_i}\right). \quad (3.-27)$$

- M_d/l Drehmoment, bezogen auf die Zylinderlänge
- ω_i, ω_a Winkelgeschwindigkeit des inneren bzw. äußeren Zylinders
- η Dynamische Viskosität
- ρ Dichte
- r_i, r_a Radius des inneren bzw. äußeren Zylinders

In der vorstehenden Liste wurden ω_a und r_a durch die bereits offenkundig dimensionslosen Größen ω_a/ω_i und r_a/r_i ersetzt, die bei der weiteren Dimensionsanalyse nicht mehr berücksichtigt werden müssen.

Die zu dem Einflussgrößenzusammenhang (3.-27) gehörige Dimensionstafel ① im $\{M, L, T\}$ -System ist in **Bild 3.10** dargestellt.

①	M	L	T
M_d/l	1	1	-2
ω_i	0	0	-1
η	1	-1	-1
ρ	1	-3	0
r_i	0	1	0

②	M	L
$M_d/\omega_i^2 l$	1	1
η/ω_i	1	-1
ρ	1	-3
r_i	0	1

③	M
$M_d/r_i \omega_i^2 l$	1
$\eta r_i/\omega_i$	1
ρr_i^3	1

④
$M_d/\eta \omega_i r_i^2 l$
$\omega_i r_i^2 \rho/\eta$

Bild 3.10: Dimensionstafel ① zu Gleichung (3.-27) und Eliminierung der Spaltenvektoren

Mit den in **Bild 3.10** nach Eliminierung der Spaltenvektoren erhaltenen Dimensionslosen und den beiden vorstehend bemerkten offensichtlichen Dimensionslosen erhält man die dimensionslose Beziehung

$$\frac{M_d}{\eta \omega_i r_i^2 l} = F\left(\frac{\omega_i r_i^2 \rho}{\eta}, \frac{\omega_a}{\omega_i}, \frac{r_a}{r_i}\right), \quad (3.-28)$$

Die erste Dimensionslose in der Argumentklammer ist der Struktur nach eine Reynoldszahl. Bei größeren Werten dieser Zahl wird die Strömung im Ringspalt turbulent (analog zur Rohrströmung).

Zur Aufstellung von empirischen Gleichungen zwischen den gefundenen Dimensionslosen würde man eine Versuchsanordnung mit zwei separat und variabel angetriebenen Zylindern benötigen, bei der zudem der innere Zylinder durch weitere mit verschiedenen Radien austauschbar ist. Die Untersuchung, für die nur ein einziges Fluid benötigt wird, wäre dann etwa für die verschiedenen Fälle „innerer oder äußerer Zylinder rotiert“ bzw. „beide Zylinder rotieren“ durchzuführen.

Für den Sonderfall des allein rotierenden äußeren Zylinders (klassische Couette-Strömung) und rein laminare Strömung im Ringspalt (verschwindender Einfluss der Reynoldszahl) erhält man aus Gleichung (3.-28)

$$\frac{M_d}{\eta \omega r_i^2 l} = G\left(\frac{r_a}{r_i}\right). \quad (3.-29)$$

Dieser einfache Fall lässt sich auch analytisch behandeln, mit dem Ergebnis

$$\frac{M_d}{\eta \omega r_i^2 l} = \frac{4\pi}{1 - \left(\frac{r_a}{r_i}\right)^{-2}}. \quad (3.-30)$$

3.3 Stationärer Wärmeübergang an einer Kugel in Querströmung

Der hier zu untersuchende Sachverhalt ist in **Bild 3.11** skizziert: Eine Kugel mit einer durch innere Wärmequellen konstant gehaltenen Oberflächentemperatur

steht in einer turbulenten und hinsichtlich der Grundströmung stationären Querströmung mit tieferer Temperatur.

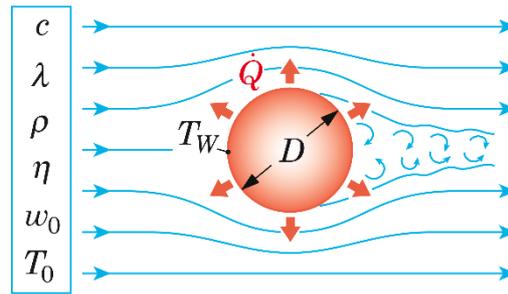


Bild 3.11: Kugel in einer Querströmung tieferer Temperatur

Für den Wärmestrom, der von der Kugel an das umströmende Fluid übergeht, wird unter der Voraussetzung konstanter Stoffwerte des Fluids die folgende Einflussgrößenliste aufgestellt:

$$\dot{Q} = f(\Delta T, D, w_0, \rho, \eta, \lambda, c) . \quad (3.-31)$$

\dot{Q}	Wärmestrom
ΔT	Temperaturdifferenz $T_W - T_0$
D	Kugeldurchmesser
w_0	Geschwindigkeit der Querströmung
ρ	Dichte
η	Dynamische Viskosität
λ	Wärmeleitfähigkeit
c	Spezifische Wärmekapazität

Anmerkung: Die Verwendung von ΔT anstelle von T_W und T_0 setzt konstante Stoffwerte voraus, da sonst das Temperaturniveau fixiert werden muss (vergl. **Kap. 2.3**).

Im $\{M, L, T, \Theta\}$ -System erhält man hierzu die Dimensionstafel ① in **Bild 3.12**.

Einige Potenzproduktumwandlungen zwischen den in Tafel ⑤ erhaltenen Dimensionslosen führen auf den dimensionslosen Zusammenhang

$$\frac{\dot{Q}}{D\lambda\Delta T} = F\left(\frac{w_0 D \rho}{\eta}, \frac{\eta c}{\lambda}, \frac{c \Delta T}{w_0^2}\right) . \quad (3.-32)$$

Die Dimensionslose auf der linken Seite lässt sich unter Erweiterung mit πD mit der Definition der Wärmeübergangszahl $\alpha = \dot{Q} / A_K \Delta T$ und mit der Kugeloberfläche $A_K = \pi D^2$ umschreiben in

$$\frac{\dot{Q}}{D\lambda\Delta T} = \frac{\dot{Q} \pi D}{\pi D^2 \lambda \Delta T} = \pi \frac{\alpha D}{\lambda} = \pi \text{Nu} , \quad (3.-33)$$

①	M	L	T	Θ
\dot{Q}	1	2	-3	0
ΔT	0	0	0	1
D	0	1	0	0
w_0	0	1	-1	0
ρ	1	-3	0	0
η	1	-1	-1	0
λ	1	1	-3	-1
c	0	2	-2	-1

②	M	L	T
\dot{Q}	1	2	-3
D	0	1	0
w_0	0	1	-1
ρ	1	-3	0
η	1	-1	-1
$\lambda \Delta T$	1	1	-3
$c \Delta T$	0	2	-2

③	M	L
$\dot{Q} / (c \Delta T)^{3/2}$	1	-1
D	0	1
$w_0 / (c \Delta T)^{1/2}$	0	0
ρ	1	-3
$\eta / (c \Delta T)^{1/2}$	1	-2
$\lambda \Delta T / (c \Delta T)^{3/2}$	1	-2

④	M
$\dot{Q} D / (c \Delta T)^{3/2}$	1
$w_0 / (c \Delta T)^{1/2}$	0
ρD^3	1
$\eta D^2 / (c \Delta T)^{1/2}$	1
$\lambda \Delta T D^2 / (c \Delta T)^{3/2}$	1

⑤
$\dot{Q} / (c \Delta T)^{3/2} \rho D^2$
$w_0 / (c \Delta T)^{1/2}$
$\eta / (c \Delta T)^{1/2} \rho D$
$\lambda \Delta T / (c \Delta T)^{3/2} \rho D$

Bild 3.12: Dimensionstafel ① zu Gleichung (3.-31) und Eliminierung der Spaltenvektoren

d. h. sie ist eine etwas andere Formulierung der bekannten Nusseltzahl Nu. Bei den ersten beiden Dimensionslosen in der Argumentklammer handelt es sich um die Reynoldszahl Re bzw. um die Prandlzahl Pr. Hiernach kann die Gleichung (3.-32) auch in der Form

$$\text{Nu} = F\left(\text{Re}, \text{Pr}, \frac{c \Delta T}{w_0^2}\right) \quad (3.-34)$$

geschrieben werden. Im Hinblick auf die Bedeutung der dritten Dimensionslosen in der Argumentklammer ist es hier nützlich, die Dimensionsanalyse in einem $\{M, L, T, \Theta, Q\}$ -System erneut durchzuführen, in dem die Wärme Q als zusätzliche Grundgröße verwendet wird. Damit kommt allerdings eine Dimensionskonstante, das mechanische Wärmeäquivalent A_Q , ins Spiel, die in der Einflussgrößenliste des Problems berücksichtigt werden muss:

$$\dot{Q} = g(\Delta T, D, w_0, \rho, \eta, \lambda, c, A_Q) \quad (3.-35)$$

Die zugehörige Dimensionstafel ist nun die Tafel ① in **Bild 3.13**. Die weiteren Tafeln ② bis ⑥ zeigen die in diesem Fall etwas aufwändigere schrittweise Eliminierung der Spaltenvektoren der Dimensionsmatrix.

①	<i>M</i>	<i>L</i>	<i>T</i>	Θ	<i>Q</i>
\dot{Q}	0	0	-1	0	1
ΔT	0	0	0	1	0
<i>D</i>	0	1	0	0	0
w_0	0	1	-1	0	0
ρ	1	-3	0	0	0
η	1	-1	-1	0	0
λ	0	-1	-1	-1	1
<i>c</i>	-1	0	0	-1	1
A_Q	-1	-2	2	0	1

②	<i>M</i>	<i>L</i>	<i>T</i>	Θ
\dot{Q}/λ	0	1	0	1
ΔT	0	0	0	1
<i>D</i>	0	1	0	0
w_0	0	1	-1	0
ρ	1	-3	0	0
η	1	-1	-1	0
c/λ	-1	1	1	0
A_Q/λ	-1	-1	3	1

③	<i>M</i>	<i>L</i>	<i>T</i>
$\dot{Q}/\Delta T\lambda$	0	1	0
<i>D</i>	0	1	0
w_0	0	1	-1
ρ	1	-3	0
η	1	-1	-1
c/λ	-1	1	1
$A_Q/\Delta T\lambda$	-1	-1	3

④	<i>M</i>	<i>L</i>
$\dot{Q}/\Delta T\lambda$	0	1
<i>D</i>	0	1
ρ	1	-3
η/w_0	1	-2
cw_0/λ	-1	2
$A_Qw_0^3/\Delta T\lambda$	-1	2

⑤	<i>M</i>
$\dot{Q}/D\Delta T\lambda$	0
ρD^3	1
$\eta D^2/w_0$	1
$cw_0/D^2\lambda$	-1
$A_Qw_0^3/\Delta T\lambda D^2$	-1

⑥
$\dot{Q}/D\Delta T\lambda$
$\eta/\rho Dw_0$
$cw_0\rho D/\lambda$
$A_Qw_0^3\rho D/\Delta T\lambda$

Bild 3.13: Dimensionstafel ① zu Gleichung (3.-35) und Eliminierung der Spaltenvektoren

Aus den in Tafel ⑥ gefundenen Dimensionslosen erhält man nach kurzer Potenzproduktumwandlung die dimensionslose Beziehung

$$\frac{\dot{Q}}{D\lambda\Delta T} = F\left(\frac{w_0 D \rho}{\eta}, \frac{\eta c}{\lambda}, \frac{c \Delta T}{A_Q w_0^2}\right), \quad (3.-36)$$

die sich von der vorher im $\{M, L, T, \Theta\}$ -System gefundenen Beziehung (3.-32) nur dadurch unterscheidet, dass in der letzten Dimensionslosen in der Argumentklammer nun das mechanische Wärmeäquivalent A_Q auftritt. Deshalb muss diese Dimensionslose mit der Umwandlung von mechanischer Energie in thermische Energie zusammenhängen – hier mit der Dissipation von kinetischer Strömungsenergie in innere Energie. In einer Strömung mit vernachlässigbarer Dissipation ist aber dann A_Q und damit auch die betreffende Dimensionslose problemirrelevant, so dass Gleichung (3.-36) in die verkürzte Form

$$\frac{\dot{Q}}{D\lambda\Delta T} = G\left(\frac{w_0 D \rho}{\eta}, \frac{\eta c}{\lambda}\right) \quad (3.-37)$$

übergeht. Dieser Schluss war bei der Untersuchung im $\{M, L, T, \Theta\}$ -System nicht so einfach zu ziehen. Der vorstehend behandelte physikalische Sachverhalt ist

deshalb ein Beispiel dafür, dass bei manchen Problemstellungen eine Untersuchung in verschiedenen Grundgrößensystemen gewinnbringend sein kann.

Schließlich noch eine *Nebenbemerkung*: Eine Kugel ohne innere Wärmequellen nimmt in einer stationären dissipativen Hochgeschwindigkeitsströmung eine sogenannte Übertemperatur $\Delta T = T_W - T_0$ gegenüber der Strömung an. Für diese kann in dem geläufigeren $\{M, L, T, \Theta\}$ -System aus Gleichung (3.-32) mit $\dot{Q} = 0$ der dimensionslose Zusammenhang

$$\frac{\lambda \Delta T}{w_0^2 \eta} = H \left(\frac{w_0 D \rho}{\eta}, \frac{\eta c}{\lambda} \right) \quad (3.-38)$$

gefolgert werden,

3.4 Zeitlicher Temperaturverlauf in einer angeströmten Kugel

Untersucht wird der in **Bild 3.14** skizzierte Sachverhalt: Eine Kugel mit homogener Temperatur T_{K0} wird abrupt zum Zeitpunkt $t=0$ in eine turbulente Gasströmung mit der Temperatur T_0 eingebracht. Der daraufhin einsetzende Wärmeaustausch zwischen Kugel und Fluid führt zu einem instationären Temperaturfeld in der Kugel, wobei für große Zeiten eine homogen temperierte Kugel mit $T_K = T_0$ zu erwarten ist.

Für die Temperatur T_{Km} im Kugelmittelpunkt gilt nach physikalischer Überlegung der Einflussgrößenzusammenhang:

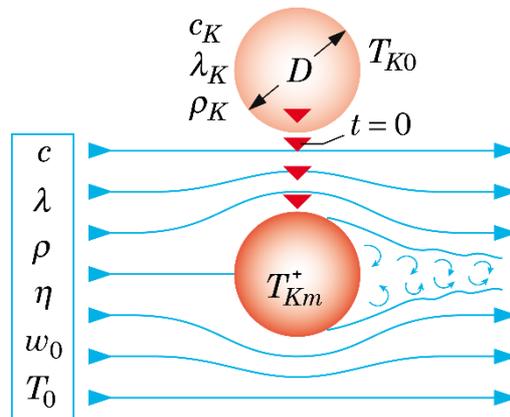


Bild 3.14: Zum Temperaturengleich in einer angeströmten Kugel

$$T_{Km} = f(T_{K0}, T_0, D, t, w_0, \eta, c, \lambda, \rho, c_K, \lambda_K, \rho_K) . \quad (3.-39)$$

T_{K0}	Homogene Anfangstemperatur der Kugel
T_0	Temperatur der Querströmung
D	Kugeldurchmesser
t	Zeitspanne seit Kontaktbeginn Kugel/Strömung
w_0	Geschwindigkeit der Querströmung

- η Dynamische Viskosität des Fluids
 c, λ, ρ Spezifische Wärmekapazität, Wärmeleitfähigkeit und Dichte des Fluids
 c_K, λ_K, ρ_K Analoge Stoffwerte des Kugelmaterials

Bei näherer Betrachtung der Einflussgrößen in der vorstehenden Liste und mit etwas Erfahrung fällt es nicht schwer, einige dieser Größen im $\{M, L, T, \Theta\}$ -System zu einfach strukturierten offensichtlichen Dimensionslosen zu verbinden. So leitet man in dem vorliegenden Fall etwa ab

$$\frac{T_{Km}}{T_0} = f^* \left(T_{K0}, \frac{T_0}{T_{K0}}, D, t, \frac{w_0 D \rho}{\eta}, \frac{\eta c}{\lambda}, c, \lambda, \rho, \frac{c_K}{c}, \frac{\lambda_K}{\lambda}, \frac{\rho_K}{\rho} \right). \quad (3.-40)$$

Für die vollständige Dimensionsanalyse braucht man sich jetzt nur noch auf den Ausschnitt

$$\frac{T_{Km}}{T_0} = f^*(T_{K0}, D, t, c, \lambda, \rho, \dots) \quad (3.-41)$$

aus der Liste zu konzentrieren.

Unter der Voraussetzung, dass die Dissipation in der Strömung zu vernachlässigen ist, führt man die abschließenden Schritte zweckmäßig im $\{M, L, T, \Theta, Q\}$ -System durch. Das in diesem System grundsätzlich als Einflussgröße zu berücksichtigende mechanische Wärmeäquivalent ist nämlich im Fall einer Strömung ohne Dissipation problemirrelevant, was zu einer um eins verringerten Anzahl der Dimensionslosen führt (vergl. die Ausführungen in **Kap. 3.3**). Die offensichtlichen Dimensionslosen in Gleichung (3.-40) sind auch in diesem erweiterten System dimensionslos.

①	M	L	T	Θ	Q
T_{K0}	0	0	0	1	0
D	0	1	0	0	0
t	0	0	1	0	0
c	-1	0	0	-1	1
λ	0	-1	-1	-1	1
ρ	1	-3	0	0	0

②	M	L	T	Θ
T_{K0}	0	0	0	1
D	0	1	0	0
t	0	0	1	0
λ/c	1	-1	-1	0
ρ	1	-3	0	0

③	M	L
D	0	1
$\lambda t/c$	1	-1
ρ	1	-3

④	M
$\lambda t D/c$	1
ρD^3	1

⑤
$\lambda t/c \rho D^2$

Bild 3.15: Dimensionstafel ① zu Gleichung (3.-41) und Eliminierung der Spaltenvektoren

Zu den noch dimensionsbehafteten Argumentvariablen in Gleichung (3.-41) gehört hiernach die Dimensionstafel ① in **Bild 3.15**. Die weiteren Dimensionstafeln zeigen die schrittweise Eliminierung der Spaltenvektoren der Dimensionsmatrix.

Man bemerke noch, dass in Tafel ② die Temperatur T_{K0} gestrichen werden musste, weil die zugehörige Θ -Spalte nicht eliminiert werden kann. Dies bedeutet, dass diese Temperatur, die schon in den beiden offensichtlichen Dimensionslosen T_{Km}/T_{K0} und T_0/T_{K0} enthalten ist, in keiner weiteren Dimensionslosen mehr auftreten kann.

Mit diesem Ergebnis und den weiter vorn gebildeten offensichtlichen Dimensionslosen erhält man nun den vollständigen dimensionslosen Zusammenhang

$$\frac{T_{Km}}{T_0} = F\left(\frac{\lambda t}{c\rho D^2}, \frac{T_0}{T_{K0}}, \frac{w_0 D \rho}{\eta}, \frac{\eta c}{\lambda}, \frac{c_K}{c}, \frac{\lambda_K}{\lambda}, \frac{\rho_K}{\rho}\right). \quad (3.-42)$$

Die dritte und die vierte Dimensionslose in der Argumentklammer sind die Reynolds- bzw. die Prandlzahl.

Anhand von Gleichung (3.-42) soll noch gezeigt werden, auf welche Weise man mitunter zu einem erfolgversprechenden Gleichungsansatz zwischen den gefundenen dimensionslosen Bausteinen gelangen kann. Im vorliegenden Fall müsste ein Gleichungsansatz für T_{Km}/T_0 die beiden Randbedingungen

$$t = 0: \frac{T_{Km}}{T_0} = \frac{T_{K0}}{T_0} \quad t \gg 0: \frac{T_{Km}}{T_0} = 1 \quad (3.-43)$$

erfüllen. Hiermit und für konstante Stoffwerte könnte man nach einigem Probieren und mit etwas physikalischer Überlegung als Ansatzversuch formulieren

$$\frac{T_{Km}}{T_0} = \frac{T_{K0}}{T_0} + \left(1 - \frac{T_{K0}}{T_0}\right) \left[1 - \exp\left(-C \operatorname{Re}^x \frac{\lambda t}{c\rho D^2}\right)\right]. \quad (3.-44)$$

Der Koeffizient C und der Exponent x wären experimentell zu bestimmen.

3.5 Temperatenausgleich im Behälter

Ein Behälter mit konstanter innerer Oberflächentemperatur wird zum Zeitpunkt „null“ abrupt mit einem (im ersten Schritt turbulenzfrei gedachten) Gas von abweichender Temperatur gefüllt. Daraufhin setzt ein Temperatenausgleichsvorgang zwischen der Wand und dem eingeschlossenen Gas ein, der so lange andauert, bis die Gastemperatur homogen verteilt und gleich der Wandtemperatur ist.

Gefragt ist der zeitliche Verlauf der dabei zwischen dem Gas und der Wand auftretenden Wärmestromdichte. Die für diesen Vorgang wesentlichen Einflussgrößen sind in **Bild 3.16** eingetragen. In der folgenden Einflussgrößenliste wurden bereits einige Größen zu offensichtlichen Dimensionslosen verbunden, die bei der weiteren Dimensionsanalyse nicht mehr berücksichtigt werden müssen.

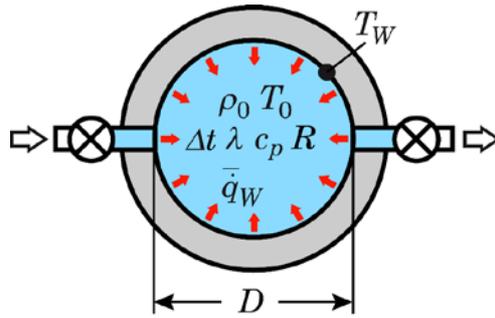


Bild 3.16: Zum instationären Wärmeübergang im Behälter

$$\bar{q}_W = f(\Delta t, \rho_0, T_0, T_W/T_0, c_p, R/c_p, \lambda, D) \quad (3.-45)$$

- \bar{q}_W Mittlere Wandwärmestromdichte
- Δt Zeitspanne seit Beginn des Gas-Wand Kontaktes
- ρ_0, T_0 Gasdichte und -temperatur bei $\Delta t=0$
- T_W Wandtemperatur (zeitlich konstant)
- c_p Spezifische Wärmekapazität bei $p=konst$
- R Spezielle Gaskonstante
- λ Wärmeleitfähigkeit
- D Innendurchmesser des kugelförmigen Behälters

Die Dimensionsanalyse erfolgt vorteilhaft in einem $\{M, L, T, \Theta, Q\}$ -System (siehe **Bild 3.17**). Da der hier behandelte Vorgang keine mechanisch-thermische Energiewandlung beinhaltet, ist nämlich das sonst als Dimensionskonstante zu berücksichtigende mechanische Wärmeäquivalent problemirrelevant.

<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%; text-align: center;"> <tr><th>①</th><th>M</th><th>L</th><th>T</th><th>Θ</th><th>Q</th></tr> <tr><td>\bar{q}_W</td><td>0</td><td>-2</td><td>-1</td><td>0</td><td>1</td></tr> <tr><td>Δt</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>ρ_0</td><td>1</td><td>-3</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>T_0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr> <tr><td>c_p</td><td>-1</td><td>0</td><td>0</td><td>-1</td><td>1</td></tr> <tr><td>λ</td><td>0</td><td>-1</td><td>-1</td><td>-1</td><td>1</td></tr> <tr><td>D</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> </table>	①	M	L	T	Θ	Q	\bar{q}_W	0	-2	-1	0	1	Δt	0	0	1	0	0	ρ_0	1	-3	0	0	0	T_0	0	0	0	1	0	c_p	-1	0	0	-1	1	λ	0	-1	-1	-1	1	D	0	1	0	0	0	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%; text-align: center;"> <tr><th>②</th><th>M</th><th>L</th><th>T</th><th>Θ</th></tr> <tr><td>\bar{q}_W/λ</td><td>0</td><td>-1</td><td>0</td><td>1</td></tr> <tr><td>Δt</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr> <tr><td>ρ_0</td><td>1</td><td>-3</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>T_0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr> <tr><td>c_p/λ</td><td>-1</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr> <tr><td>D</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr> </table>	②	M	L	T	Θ	\bar{q}_W/λ	0	-1	0	1	Δt	0	0	1	0	ρ_0	1	-3	0	0	T_0	0	0	0	1	c_p/λ	-1	1	1	0	D	0	1	0	0	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%; text-align: center;"> <tr><th>③</th><th>M</th><th>L</th><th>T</th></tr> <tr><td>$\bar{q}_W/\lambda T_0$</td><td>0</td><td>-1</td><td>0</td></tr> <tr><td>Δt</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr> <tr><td>ρ_0</td><td>1</td><td>-3</td><td>0</td></tr> <tr><td>c_p/λ</td><td>-1</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>D</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr> </table>	③	M	L	T	$\bar{q}_W/\lambda T_0$	0	-1	0	Δt	0	0	1	ρ_0	1	-3	0	c_p/λ	-1	1	1	D	0	1	0
①	M	L	T	Θ	Q																																																																																																								
\bar{q}_W	0	-2	-1	0	1																																																																																																								
Δt	0	0	1	0	0																																																																																																								
ρ_0	1	-3	0	0	0																																																																																																								
T_0	0	0	0	1	0																																																																																																								
c_p	-1	0	0	-1	1																																																																																																								
λ	0	-1	-1	-1	1																																																																																																								
D	0	1	0	0	0																																																																																																								
②	M	L	T	Θ																																																																																																									
\bar{q}_W/λ	0	-1	0	1																																																																																																									
Δt	0	0	1	0																																																																																																									
ρ_0	1	-3	0	0																																																																																																									
T_0	0	0	0	1																																																																																																									
c_p/λ	-1	1	1	0																																																																																																									
D	0	1	0	0																																																																																																									
③	M	L	T																																																																																																										
$\bar{q}_W/\lambda T_0$	0	-1	0																																																																																																										
Δt	0	0	1																																																																																																										
ρ_0	1	-3	0																																																																																																										
c_p/λ	-1	1	1																																																																																																										
D	0	1	0																																																																																																										
<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%; text-align: center;"> <tr><th>④</th><th>M</th><th>L</th></tr> <tr><td>$\bar{q}_W/\lambda T_0$</td><td>0</td><td>-1</td></tr> <tr><td>$\Delta t \lambda / c_p$</td><td>1</td><td>-1</td></tr> <tr><td>ρ_0</td><td>1</td><td>-3</td></tr> <tr><td>D</td><td>0</td><td>1</td></tr> </table>	④	M	L	$\bar{q}_W/\lambda T_0$	0	-1	$\Delta t \lambda / c_p$	1	-1	ρ_0	1	-3	D	0	1	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%; text-align: center;"> <tr><th>⑤</th><th>M</th></tr> <tr><td>$\bar{q}_W D / \lambda T_0$</td><td>0</td></tr> <tr><td>$\Delta t \lambda D / c_p$</td><td>1</td></tr> <tr><td>$\rho_0 D^3$</td><td>1</td></tr> </table>	⑤	M	$\bar{q}_W D / \lambda T_0$	0	$\Delta t \lambda D / c_p$	1	$\rho_0 D^3$	1	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%; text-align: center;"> <tr><th>⑥</th></tr> <tr><td>$\bar{q}_W D / \lambda T_0$</td></tr> <tr><td>$\Delta t \lambda / c_p \rho_0 D^2$</td></tr> </table>	⑥	$\bar{q}_W D / \lambda T_0$	$\Delta t \lambda / c_p \rho_0 D^2$																																																																																	
④	M	L																																																																																																											
$\bar{q}_W/\lambda T_0$	0	-1																																																																																																											
$\Delta t \lambda / c_p$	1	-1																																																																																																											
ρ_0	1	-3																																																																																																											
D	0	1																																																																																																											
⑤	M																																																																																																												
$\bar{q}_W D / \lambda T_0$	0																																																																																																												
$\Delta t \lambda D / c_p$	1																																																																																																												
$\rho_0 D^3$	1																																																																																																												
⑥																																																																																																													
$\bar{q}_W D / \lambda T_0$																																																																																																													
$\Delta t \lambda / c_p \rho_0 D^2$																																																																																																													

Bild 3.17: Dimensionstabelle ① zu Gleichung (3.-45) und Eliminierung der Spaltenvektoren.

Hiernach und mit den offensichtlichen dimensionslosen aus Gleichung (3.-45) sowie unter Einführung der sogenannten Temperaturleitzahl $a = \lambda / \rho_0 c_p$ folgt der dimensionslose Zusammenhang

$$\frac{\bar{q}_W D}{\lambda T_0} = F \left(\frac{\Delta t a}{D^2}, \frac{T_W}{T_0}, \frac{R}{c_p} \right) \quad (3.-46)$$

Anmerkung: Bei der instationären Wärmeübertragung ist die Temperaturleit-zahl ein Maß dafür, wie schnell die durch den Vorgang verursachten Temperaturgradienten in Wandnähe durch Wärmeleitung abgebaut werden. Kleine Werte der Temperaturleitzahl wirken in Richtung auf größere Temperaturgradienten und führen damit auch zu größeren Werten der Wandwärmestromdichte.

Ein Funktionsansatz zwischen den Dimensionslosen in Gleichung (3.-46) muss die folgenden Bedingungen erfüllen:

$$\begin{aligned} \bar{q}_W &\rightarrow \infty && \text{für } \Delta t = 0 \\ \bar{q}_W &= 0 && \text{für } \Delta t \rightarrow \infty \\ \bar{q}_W &= 0 && \text{für } T_W = T_0 \end{aligned}$$

Außerdem muss für große Kugelbehälter der Einfluss des Durchmessers verschwinden, da dann ein ebenes Problem vorliegt. Mit etwas Überlegung gelangt man hiernach unter Vernachlässigung des Einflusses von R/c_p zu dem Funktionsansatz

$$\frac{\bar{q}_W \sqrt{\Delta t a}}{\lambda T_0} = C_1 \left(\frac{T_W}{T_0} - 1 \right) \left[1 - \exp \left(-C_2 \frac{D}{\sqrt{\Delta t a}} \right) \right]. \quad (3.-47)$$

Nach diesem Ergebnis für den turbulenzfreien Fall soll noch der *Einfluss einer bei der Füllung des Behälters entstandenen Anfangsturbulenz* in Betracht gezogen werden. Hierzu wird gemäß folgender Überlegungen verfahren:

1) Es wird angenommen, dass sich der Turbulenzzustand des Gases zu Beginn des Vorgangs durch eine mittlere Turbulenzintensität v'_0 und ein mittleres charakteristisches Längenmaß δ_0 der Wirbelelemente charakterisieren lässt.

2) Bei der Gleichung (3.-47) muss es sich um die spezielle Form der nun gesuchten allgemeineren Gleichung für den turbulenten Wärmeübergang handeln, in die die Letztere für sehr kleine Werte der Turbulenzintensität übergeht. Deshalb sollte es möglich sein, die Gleichung (3.-47) durch eine unter Verwendung der Turbulenzdaten unter Punkt 1) vorgenommene Formelweiterung auf den turbulenten Fall zu verallgemeinern.

3) Bekanntlich werden Wärmeaustauschvorgänge an Wandungen durch Turbulenzwirkungen verstärkt, da diese eine Vergrößerung der Temperaturgradienten an der Wand zur Folge haben. Dabei kommt es zu einer Überlagerung mit der weiter oben beschriebenen Auswirkung der Temperaturleitzahl auf den Temperaturgradienten. Eine Verringerung der Temperaturleitzahl sollte sich hiernach so ähnlich auswirken, wie eine zunehmende Turbulenz.

Nach Vorstehendem wird als Arbeitshypothese formuliert: Zur *Verallgemeinerung der Gleichung (3.-47) auf den turbulenten Fall* ist die Temperaturleitzahl a durch eine „scheinbare turbulente Temperaturleitzahl“ a_{turb} zu ersetzen, die mit

zunehmender Turbulenzwirkung gegenüber der Erstgenannten abfällt und umgekehrt. Da bei dem hier gegebenen instationären Vorgang die Turbulenz infolge von Zähigkeitswirkungen über der Zeit abklingen wird, ist mit einem dementsprechenden Einfluss der Zähigkeit und der Zeit auf a_{turb} zu rechnen. Hiernach wird die folgende Einflussgrößenliste aufgestellt:

$$\frac{a_{turb}}{a} = f(v'_0, \delta_0, \rho_0, \eta, \Delta t). \quad (3.-48)$$

a_{turb}	Scheinbare turbulente Temperaturleitzahl
a	Temperaturleitzahl
v'_0	Mittlere Turbulenzintensität zu Beginn des Vorgangs ($v' = \sqrt{2e_{kin}}$, e_{kin} ist die massebezogene kinetische Turbulenzenergie)
δ_0	Mittleres charakteristisches Längenmaß der Wirbelelemente zu Beginn des Vorgangs
ρ_0	Dichte zu Beginn des Vorgangs
η	Dynamische Viskosität
Δt	Zeitspanne seit Beginn des Vorgangs

Die Dimensionsanalyse ist in einem $\{M, L, T\}$ -System durchzuführen. In **Bild 3.18** ist die Dimensionstafel ① zu der vorstehenden Einflussgrößenliste dargestellt, wobei die bereits dimensionslose Größe a_{turb}/a nicht mehr mitgeführt werden musste.

①	M	L	T	②	M	L	③	M	④
v'_0	0	1	-1	$v'_0 \Delta t$	0	1	$v'_0 \Delta t / \delta_0$	0	$v'_0 \Delta t / \delta_0$
δ_0	0	1	0	δ_0	0	1	$\rho_0 \delta_0^3$	1	$\rho_0 \delta_0^2 / \eta \Delta t$
ρ_0	1	-3	0	ρ_0	1	-3	$\eta \Delta t \delta_0$	1	
η	1	-1	-1	$\eta \Delta t$	1	-1			
Δt	0	0	1						

Bild 3.18: Dimensionstafel ① zu Gleichung (3.-48) und nachfolgende Eliminierung der Spaltenvektoren

Mit der Potenzproduktumwandlung

$$\frac{\rho_0 \delta_0^2}{\eta \Delta t} \times \frac{v'_0 \Delta t}{\delta_0} = \frac{\rho_0 v'_0 \delta_0}{\eta} \quad (3.-49)$$

erhält man als Ergebnis der Dimensionsanalyse den dimensionslosen Zusammenhang

$$\frac{a_{turb}}{a} = F\left(\frac{\rho_0 v'_0 \delta_0}{\eta}, \frac{\Delta t \eta}{\rho_0 \delta_0^2}\right). \quad (3.-50)$$

Für einen Gleichungsansatz mit den gefundenen Dimensionslosen ist zu fordern:

$$\frac{a_{turb}}{a} \rightarrow 1 \quad \text{für} \quad \frac{\rho_0 v'_0 \delta_0}{\eta} \rightarrow 0 \quad (\text{turbulenzfreier Grenzfall})$$

und

$$\frac{\alpha_{turb}}{a} \rightarrow 1 \quad \text{für} \quad \frac{\Delta t \eta}{\rho_0 \delta_0^2} \rightarrow \infty \quad (\text{abgeklungene Turbulenzwirkung})$$

Diese Forderungen lassen sich erfüllen durch

$$\frac{\alpha_{turb}}{a} = \frac{1}{1 + C_1 \left(\frac{\rho_0 v'_0 \delta_0}{\eta} \right)^x \exp \left(-C_2 \frac{\Delta t \eta}{\rho_0 \delta_0^2} \right)}. \quad (3.-51)$$

3.6 Wärmeabfuhr bei der Kompression eines Gases

Betrachtet wird der in **Bild 3.19** skizzierte Zylinder, in dem das eingeschlossene Gas durch die Bewegung eines Kolbens von einem vorgegebenen Anfangsvolumen auf ein ebenfalls vorgegebenes Endvolumen verdichtet wird. Gefragt ist die dabei abgeführte Wärme. Zu Beginn des Vorgangs befindet sich das System im thermischen Gleichgewicht, d. h. die Gas- und die Wandtemperatur mögen dann übereinstimmen. Die Wandtemperatur werde während des Vorgangs konstant gehalten.

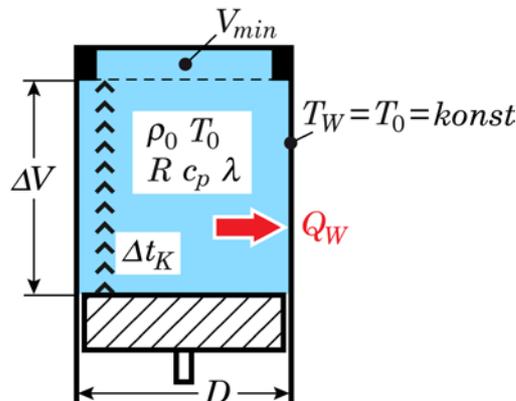


Bild 3.19: Kompressionszylinder

Für die gesuchte Wärme wird die folgende Einflussgrößenliste aufgestellt:

$$Q_W = f(\Delta t_K, \rho_0, T_0, R, c_p / R, \lambda, \Delta V, V_{min} / \Delta V, D / \Delta V^{1/3}) \quad (3.-52)$$

Q_W	Während der Kompression abgeführte Wärme
Δt_K	Zeitliche Dauer des Kompressionshubes
ρ_0, T_0	Anfangswerte von Dichte und Temperatur des Gases
R, c_p	Spez. Gaskonstante und spez. Wärmekapazität
λ	Wärmeleitfähigkeit
ΔV	Volumenänderung bei der Kompression
V_{min}	Gasvolumen bei Kompressionsende
D	Zylinderdurchmesser

In der vorstehenden Liste wurden bereits einige Einflussgrößen zu offensichtlichen Dimensionslosen verbunden, die in der folgenden für ein $\{M, L, T, \Theta\}$ -System aufgestellten Dimensionstafel nicht mehr mitgeführt werden müssen.

①	M	L	T	Θ
Q_W	1	2	-2	0
Δt_K	0	0	1	0
ρ_0	1	-3	0	0
T_0	0	0	0	1
R	0	2	-2	-1
λ	1	1	-3	-1
ΔV	0	3	0	0

②	M	L	T
Q_W	1	2	-2
Δt_K	0	0	1
ρ_0	1	-3	0
RT_0	0	2	-2
λT_0	1	1	-3
ΔV	0	3	0

③	M	L
$Q_W \Delta t_K^2$	1	2
ρ_0	1	-3
$RT_0 \Delta t_K^2$	0	2
$\lambda T_0 \Delta t_K^3$	1	1
ΔV	0	3

④	M
$Q_W \Delta t_K^2 / \Delta V^{2/3}$	1
$\rho_0 \Delta V$	1
$RT_0 \Delta t_K^2 / \Delta V^{2/3}$	0
$\lambda T_0 \Delta t_K^3 / \Delta V^{1/3}$	1

⑤
$Q_W \Delta t_K^2 / \Delta V^{5/3} \rho_0$
$RT_0 \Delta t_K^2 / \Delta V^{2/3}$
$\lambda T_0 \Delta t_K^3 / \Delta V^{4/3} \rho_0$

Bild 3.20: Dimensionstafel ① zu Gleichung (3.-52) und nachfolgende Eliminierung der Spaltenvektoren

Mit den offensichtlichen Dimensionslosen aus Gleichung (3.-52) und den (grundsätzlich willkürlichen) Potenzproduktumwandlungen

$$\frac{Q_W \Delta t_K^2}{\rho_0 \Delta V^{5/3}} \times \left(\frac{RT_0 \Delta t_K^2}{\Delta V^{2/3}} \right)^{-1} = \frac{Q_W}{\rho_0 RT_0 \Delta V},$$

$$\frac{\lambda T_0 \Delta t_K^3}{\rho_0 \Delta V^{4/3}} \times \left(\frac{RT_0 \Delta t_K^2}{\Delta V^{2/3}} \right)^{-1} \times \left(\frac{c_p}{R} \right)^{-1} = \frac{\lambda \Delta t_K}{\rho_0 c_p \Delta V^{2/3}},$$

$$\left(\frac{RT_0 \Delta t_K^2}{\Delta V^{2/3}} \right)^{-1/2} = \frac{\Delta V^{1/3}}{\sqrt{RT_0 \Delta t_K}}$$

erhält man als ein nützlich erscheinendes Ergebnis der Dimensionsanalyse

$$\frac{Q_W}{\rho_0 RT_0 \Delta V} = F \left(\frac{\Delta V^{1/3}}{\sqrt{RT_0 \Delta t_K}}, \frac{\lambda \Delta t_K}{\rho_0 c_p \Delta V^{2/3}}, \frac{c_p}{R}, \frac{V_{\min}}{\Delta V}, \frac{D}{\Delta V^{1/3}} \right). \quad (3.-53)$$

Der Einfluss der ersten Dimensionslosen in der Argumentklammer, bei der es sich der Struktur nach um eine Machzahl handelt, ist vernachlässigbar, weil sie unter technischen Randbedingungen auf nur sehr geringe Werte begrenzt ist⁶.

⁶ Dies würde sich erst ändern, wenn die Geschwindigkeit des Kolbens während der Kompression in die Größenordnung der Schallgeschwindigkeit gelänge, was aber auszuschließen ist.

Ein Funktionsansatz zwischen den verbliebenen Dimensionslosen müsste die folgenden beiden Bedingungen erfüllen:

- 1) $Q_W \rightarrow 0$ für $\Delta t_K \rightarrow 0$ (adiabate Kompression)
- 2) $Q_W \rightarrow |W_{V,T=\text{const}}|$ für $\Delta t_K \rightarrow \infty$ (isotherme Kompression)

Für die Volumenänderungsarbeit bei isothermer Kompression gilt mit den hier verwendeten Bezeichnungen

$$|W_{V,T=\text{const}}| = \rho_0 \Delta V \left(1 + \frac{V_{\min}}{\Delta V} \right) RT_0 \ln \frac{1 + V_{\min}/\Delta V}{V_{\min}/\Delta V} . \quad (3.-54)$$

Hiernach und unter der Annahme von konstanten Werten für c_p/R und $D/\Delta V^{1/3}$ könnte ein Funktionsansatz folgendermaßen aussehen,

$$\frac{Q_W}{\rho_0 RT_0 \Delta V} = \left(1 + \frac{V_{\min}}{\Delta V} \right) \cdot \ln \frac{1 + V_{\min}/\Delta V}{V_{\min}/\Delta V} \left[1 - \exp \left(-C \frac{\lambda \Delta t_K}{\rho_0 c_p \Delta V^{2/3}} \right) \right] . \quad (3.-55)$$

3.7 Dissipation im Rührwerk

Betrachtet wird das in **Bild 3.21** skizzierte Rührwerk, bei dem die mittlere Temperatur des Rührmediums durch eine äußere Kühlung auf einem vorgegebenen Wert gehalten wird. Gefragt ist der hierbei an das Kühlmedium abzuführende Wärmestrom

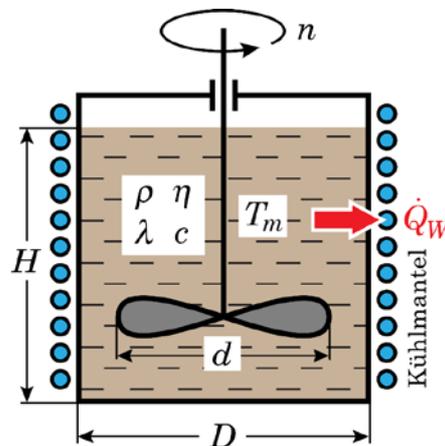


Bild 3.21: Rührwerk mit äußerer Kühlung

In der Skizze sind die als wesentlich anzusehenden Einflussgrößen eingetragen. Damit gilt für den Kühlwärmestrom

$$\dot{Q}_W = f \left(n, \rho, \eta, \lambda, \frac{\eta c}{\lambda}, \frac{d}{D}, \frac{H}{D}, d, T_m \right) . \quad (3.-56)$$

\dot{Q}_W Kühlwärmestrom
 n Rührerdrehzahl

ρ, η, λ, c	Dichte, dyn. Viskosität, Wärmeleitfähigkeit, und spez. Wärmekapazität des Rührmediums
d	Rührerdurchmesser
D	Gehäusedurchmesser
H	Einfüllhöhe des Rührmediums
T_m	Wandtemperatur

In der obigen Argumentliste wurden c , D und H bereits mit anderen geeigneten Einflussgrößen zu offensichtlichen dimensionslosen verbunden ($\eta c / \lambda$ ist die Prandl-Zahl). Für die hiernach verbleibenden dimensionsbehafteten Einflussgrößen gilt im $\{M, L, T, \Theta\}$ -System die in **Bild 3.22** links eingetragene Dimensionstafel.

Nach Eliminierung der Spaltenvektoren und Hinzunahme der offensichtlichen dimensionslosen resultiert der folgende dimensionslose Zusammenhang

$$\frac{\dot{Q}_W}{n^2 d^3 \eta} = F\left(\frac{\rho d^2 n}{\eta}, \frac{\lambda T_m}{d^2 n^2 \eta}, \frac{\eta c}{\lambda}, \frac{d}{D}, \frac{H}{D}\right). \quad (3.-57)$$

①	M	L	T	Θ	②	M	L	T	③	M	L	④	M
\dot{Q}_W	1	2	-3	0	\dot{Q}_W	1	2	-3	\dot{Q}_W / n^3	1	2	$\dot{Q}_W / n^3 d^2$	1
n	0	0	-1	0	n	0	0	-1	ρ	1	-3	ρd^3	1
ρ	1	-3	0	0	ρ	1	-3	0	η / n	1	-1	$\eta d / n$	1
η	1	-1	-1	0	η	1	-1	-1	$\lambda T_m / n^3$	1	1	$\lambda T_m / d n^3$	1
λ	1	1	-3	-1	λT_m	1	1	-3	d	0	1		
d	0	1	0	0	d	0	1	0					
T_m	0	0	0	1									
												⑤	
												$\dot{Q}_W / n^2 d^3 \eta$	
												$\rho d^2 n / \eta$	
												$\lambda T_m / d^2 n^2 \eta$	

Bild 3.22: Dimensionstafel ① zu Gleichung (3.-56) und Eliminierung der Spaltenvektoren

Mit den Potenzproduktumwandlungen

$$\frac{\dot{Q}_W}{n^2 d^3 \eta} \times \left(\frac{\lambda T_m}{d^2 n^2 \eta}\right)^{-1} = \frac{\dot{Q}_W}{\lambda T_m d} \quad (3.-58)$$

und

$$\frac{\lambda T_m}{d^2 n^2 \eta} \times \frac{\eta c}{\lambda} = \frac{c T_m}{d^2 n^2} \quad (3.-59)$$

wird schließlich:

$$\frac{\dot{Q}_W}{\lambda T_m d} = F\left(\frac{\rho d^2 n}{\eta}, \frac{\eta c}{\lambda}, \frac{c T_m}{d^2 n^2}, \frac{d}{D}, \frac{H}{D}\right). \quad (3.-60)$$

Die erste Dimensionslose in der Argumentklammer ist der Struktur nach eine Reynoldszahl und die zweite ist die Prandlzahl. Die dritte Dimensionslose ist von gleicher Struktur wie die in **Kap. 3.3** gefundene Dissipationskennzahl.

Vorstehend wurden die in das Problem eingehenden Stoffwerte des Rührmediums als konstant angesehen. Hier soll nun die vordringlich in Betracht zu ziehende Temperaturabhängigkeit der Viskosität berücksichtigt werden. Diese kann für Flüssigkeiten oft durch die Arrhenius-Beziehung

$$\eta = \text{const} \cdot \exp(E/RT) \quad (3.-61)$$

beschrieben werden, die sich, approximationstechnisch gesehen, auch in guter Näherung durch

$$\eta = \text{const} \cdot \exp(-\gamma T) \quad (3.-62)$$

wiedergeben lässt. Diese Näherungsbeziehung bietet den Vorteil, dass sie gemäß den Ausführungen in **Kap. 2.3** in die bezugsinvariante Standarddarstellung

$$\frac{\eta}{\eta(T_0)} = \exp(-\gamma(T - T_0)) \quad (3.-63)$$

überführt werden kann, die von der Wahl der Bezugstemperatur T_0 unabhängig ist. Hiernach sind zur Berücksichtigung der Temperaturabhängigkeit der Viskosität anstelle von η die Zähigkeit $\eta(T_0)$ bei der Bezugstemperatur, und γ als zusätzliche Einflussgröße in Gleichung (3.-56) aufzunehmen. Die problemirrelevante Bezugstemperatur kann auch, falls das vorteilhaft erscheint, uneingeschränkt prozessbezogen gewählt werden (vergl. **Kap. 2.3**). Hier wird man $\eta(T_0)$ gegen $\eta(T_m)$ austauschen. Die zusätzliche Einflussgröße γ führt gegenüber Gleichung (3.-60) zu einer weiteren Dimensionslosen γT_m , so dass man abschließend den dimensionslosen Zusammenhang

$$\frac{\dot{Q}_W}{\lambda T_m d} = F \left(\frac{\rho d^2 n}{\eta(T_m)}, \frac{\eta(T_m) c}{\lambda}, \frac{c T_m}{d^2 n^2}, \frac{d}{D}, \frac{H}{D}, \gamma T_m \right) \quad (3.-64)$$

erhält.

3.8 Tropfenfall in Gasatmosphäre

Im Folgenden wird ein Tropfen betrachtet, der unter der Wirkung der Erdschwere in einer Gasatmosphäre fällt und dabei nach einer gewissen Zeit eine konstante Sinkgeschwindigkeit erreicht (s. Skizze in **Bild 3.23**). Hierbei sei vorausgesetzt, dass der Tropfen hinreichend klein ist, so dass er in vertretbarer Näherung als Kugel angesehen werden kann (bei größeren Tropfen sind geometrische Deformationen zu erwarten).

Für die Sinkgeschwindigkeit v sind die folgenden Einflussgrößen zu erwarten,

$$v = f(d, \rho_f, \rho_g, \mu_g, g) \quad (3.-65)$$

- v Sinkgeschwindigkeit des Tropfens
- d Tropfendurchmesser
- ρ_f Flüssigkeitsdichte
- ρ_g Gasdichte
- μ_g Dynamische Viskosität des Gases
- g Erdbeschleunigung

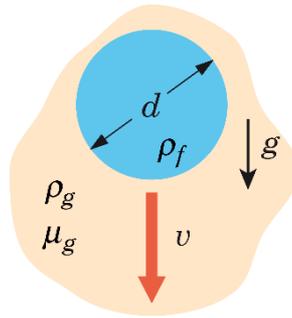


Bild 3.23: Zu den Einflussgrößen auf die Sinkgeschwindigkeit eines Tropfens in einer Gasatmosphäre

Die zugehörige Dimensionstafel ① im konventionellen $\{M, L, T\}$ -System ist in **Bild 3.24** dargestellt.

①	M	L	T
v	0	1	-1
d	0	1	0
ρ_f	1	-3	0
ρ_g	1	-3	0
η_g	1	-1	-1
g	0	1	-2

②	M	L
$v/g^{1/2}$	0	1/2
d	0	1
ρ_f	1	-3
ρ_g	1	-3
$\eta_g/g^{1/2}$	1	-3/2

③	M
$v/g^{1/2}d^{1/2}$	0
$\rho_f d^3$	1
$\rho_g d^3$	1
$\eta_g d^{3/2}/g^{1/2}$	1

④
$v/g^{1/2}d^{1/2}$
$\rho_f d^3 / \rho_g d^3$
$\eta_g / g^{1/2} \rho_g d^{3/2}$

Bild 3.24: Dimensionstafel ① zu Gleichung (3.-65) und Eliminierung der Spaltenvektoren

Durch sukzessive Eliminierung der Spaltenvektoren der Dimensionsmatrix erhält man z. B. den dimensionslosen Zusammenhang

$$\frac{v}{\sqrt{gd}} = F\left(\frac{\eta_g}{\sqrt{gd} d \rho_g}, \frac{\rho_f}{\rho_g}\right). \quad (3.-66)$$

Im vorliegenden Fall sind hinsichtlich einer Funktionsverknüpfung zwischen den beiden gefundenen Dimensionslosen einige Zusatzinformationen verfügbar. Durch eine Internetrecherche zum Thema „Sinkgeschwindigkeit von Flüssigkeitstropfen“ findet man nämlich die beiden Gleichungen

$$v = \frac{\rho_f g d^2}{18 \eta_g} \quad \text{für } d < 0,1 \text{ mm} \quad (3.-67)$$

und

$$v = 1,65 \sqrt{\frac{\rho_f}{\rho_g} g d} \quad \text{für } d > 1 \text{ mm} . \quad (3.-68)$$

Offenbar beschreiben diese Gleichungen die Sinkgeschwindigkeit zum einen für sehr kleine und zum anderen für deutlich größere Tropfendurchmesser. Durch einiges Probieren findet man den folgenden Gleichungsansatz, der dem allgemeinen dimensionslosen Zusammenhang in Gleichung (3.-66) genügt und der zudem die speziellen Gleichungen (3.-67) und (3.-68) verbindet:

$$\frac{v}{\sqrt{gd}} = \frac{1,65 \sqrt{\rho_f / \rho_g}}{1 + 29,7 \frac{\eta_g}{\sqrt{gd} d \rho_g} \sqrt{(\rho_f / \rho_g)^{-1}}} . \quad (3.-69)$$

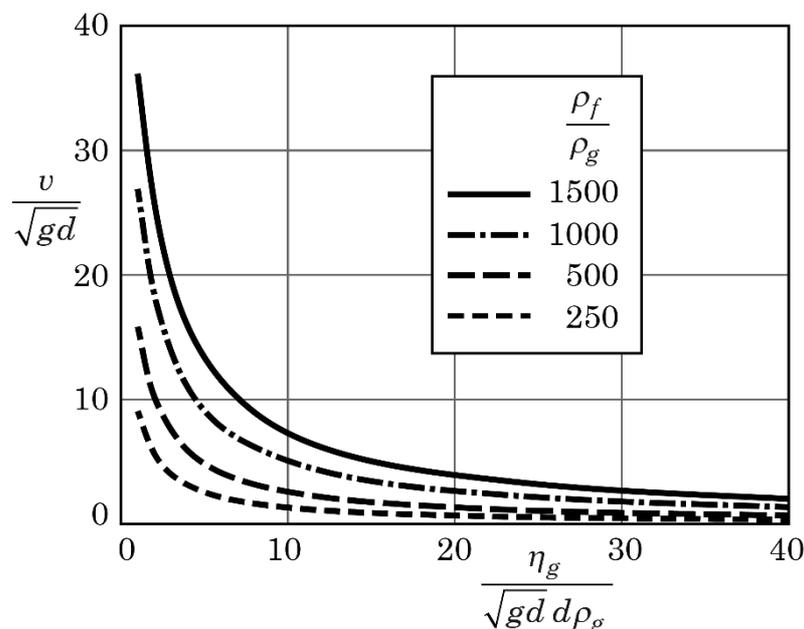


Bild 3.25: Graphische Darstellung von Gleichung (3.-69)

Für sehr kleine Tropfendurchmesser geht die vorstehende Gleichung über in die Gleichung (3.-67) und für große Tropfendurchmesser in die Gleichung (3.-68). Die

allgemeine Gleichung (3.-69) ist in **Bild 3.25** graphisch dargestellt. Aus den Kurvenverläufen ist zu ersehen, dass die dimensionslose Sinkgeschwindigkeit v/\sqrt{gd} insbesondere mit zunehmender Zähigkeit des Gases und abnehmendem Tropfendurchmesser drastisch abfällt. Dabei geht der Einfluss des Verhältnisses ρ_f/ρ_g mehr und mehr zurück.

Es sei noch bemerkt, dass die Einflussgrößenliste für die stationäre Sinkgeschwindigkeit v in Gleichung (3.-65) auch für die Zeitspanne Δt bis zum Erreichen dieser Geschwindigkeit gültig sein sollte. Deshalb findet man leicht den folgenden dimensionslosen Zusammenhang:

$$\Delta t \sqrt{\frac{g}{d}} = G \left(\frac{\eta_g}{\sqrt{gd} d \rho_g}, \frac{\rho_f}{\rho_g} \right). \quad (3.-70)$$

3.9 Laminare Flammendicke und Quenchabstand von der Wand

In **Bild 3.26** ist schematisch die Struktur einer laminaren Flamme dargestellt, die sich mit konstanter Geschwindigkeit relativ zum Unverbrannten bewegt. Eingezeichnet sind die Verläufe der Temperatur und der an dem Vorgang beteiligten generalisierten Spezies über der Distanz senkrecht zur Flammenoberfläche.

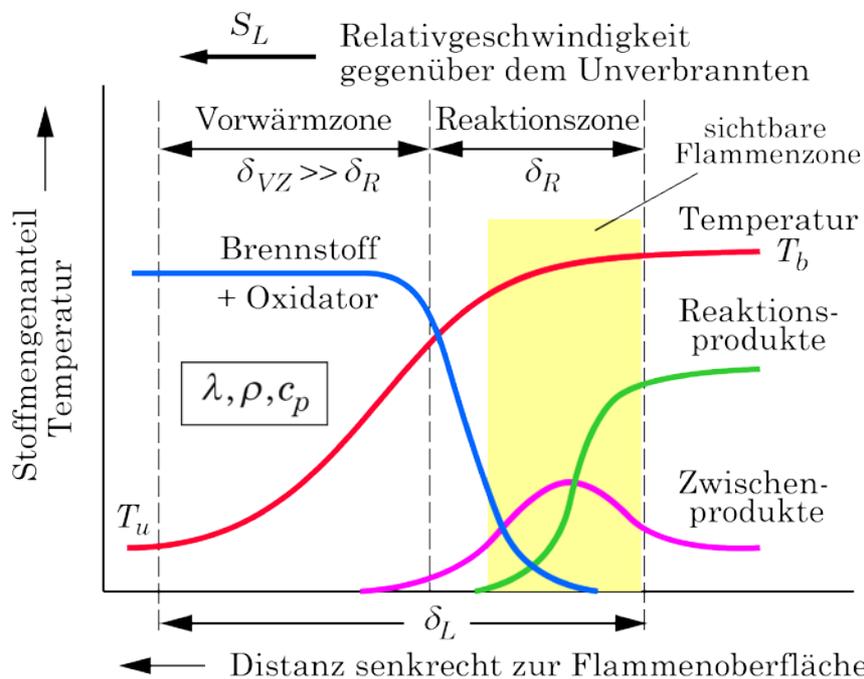


Bild 3.26: Struktur laminarer Vormischflammen (schematisch)

Die Flammenzone gliedert sich etwas vereinfachend in eine *Vorwärmzone* und eine *Reaktionszone*. In der Vorwärmzone erfolgt im Wesentlichen eine Aufheizung der Reaktionsteilnehmer durch den Wärmestrom aus der Reaktionszone. Die che-

mische Reaktion läuft erst bei schon stark erhöhter Temperatur der Reaktionsteilnehmer in der Reaktionszone ab. Aus Darstellungsgründen sind in **Bild 3.26** die realen geometrischen Verhältnisse verzerrt wiedergegeben. Tatsächlich ist in der Regel die Dicke der Vorwärmzone δ_{VZ} erheblich größer als die Dicke δ_R der Reaktionszone.

Hinsichtlich der Dicke der Flamme kommen die in **Bild 3.26** eingetragenen Einflussgrößen in Betracht: 1) die bei Wärmetransportvorgängen wichtigen Stoffgrößen der Reaktionsteilnehmer. 2) die Geschwindigkeit der Flamme, da diese die Zeit bestimmt, die für die Aufheizung in der Vorwärmzone zur Verfügung steht und 3) die Temperaturen des Frisch- und des Verbrennungsgases.

$$\delta_L = f(\lambda, \rho, c_p, S_L, T_u, T_b) \quad (3.-71)$$

- δ_L Dicke der laminaren Flamme
- λ Wärmeleitfähigkeit
- ρ Dichte
- c_p Spezifische Wärmekapazität
- S_L Laminare Flammgeschwindigkeit
- T_u Frischgastemperatur vor der Flamme
- T_b Verbrennungsgastemperatur hinter der Flamme

Die dimensionsanalytische Behandlung dieses Sachverhaltes ließe sich im $\{M, L, T, \Theta\}$ -System durchführen. Da hier aber keine dissipativen Effekte zu erwarten sind, kann man vorteilhaft die Wärme Q als Grundgröße hinzunehmen, ohne dass in Gleichung (3.-71) zusätzlich eine Dimensionskonstante zu berücksichtigen wäre. Im $\{M, L, T, \Theta, Q\}$ -System erhält man dann die in **Bild 3.27** links stehende Dimensionstafel ①.

①	M	L	T	Θ	Q
δ_L	0	1	0	0	0
λ	0	-1	-1	-1	1
ρ	1	-3	0	0	0
c_p	-1	0	0	-1	1
S_L	0	1	-1	0	0
T_u	0	0	0	1	0

②	M	L	T	Θ
δ_L	0	1	0	0
λ/c_p	1	-1	-1	0
ρ	1	-3	0	0
S_L	0	1	-1	0
T_u	0	0	0	1

③	M	L
δ_L	0	1
$\lambda/c_p S_L$	1	-2
ρ	1	-3

④	M
$\delta_L \rho^{1/3}$	1/3
$\lambda/c_p S_L \rho^{2/3}$	1/3

⑤
$\delta_L \rho c_p S_L / \lambda$

Bild 3.27: Dimensionstafel ① zu Gleichung (3.-71) und nachfolgende sukzessive Eliminierung der Spaltenvektoren

Die Temperatur T_b wurde in der Dimensionstafel ① nicht mitgeführt, da sie offensichtlich mit der Temperatur T_u zu einer ersten dimensionslosen T_b/T_u ver-

bunden werden kann. Im Hinblick auf die Tafel ② bemerke man, dass die Temperatur T_u gestrichen werden musste, weil sie allein in der Θ -Spalte einen Eintrag verursacht und deshalb nicht eliminiert werden kann. Dies bedeutet, dass T_u nur in Verbindung mit T_b in der schon gefundenen dimensionslosen T_b/T_u auftreten kann.

Nach sukzessiver Eliminierung der Spaltenvektoren erhält man das Resultat

$$\frac{\delta_L \rho c_p S_L}{\lambda} = F\left(\frac{T_b}{T_u}\right). \quad (3.-72)$$

Der hier behandelte Sachverhalt ist allerdings durch ein sehr großes Temperaturfeld gekennzeichnet, so dass die Annahme von konstanten Stoffwerten nicht problemadäquat sein kann. Hinsichtlich der spezifischen Wärmekapazität könnte man zwar noch einen akzeptablen Mittelwert angeben, für die Wärmeleitfähigkeit gilt das aber nicht mehr, da sie über den in Frage kommenden Temperaturbereich um einen Faktor von ca. 6 veränderlich ist.

An dieser Stelle ist auf die Ausführungen in **Kap. 2.3** zu verweisen. Die Temperaturabhängigkeit der spezifischen Wärmekapazität von Luft lässt sich nämlich noch hinreichend und die der Wärmeleitfähigkeit von Luft sogar sehr gut durch eine Beziehung gemäß der oberen Zeile in Gleichung (2.-4) approximieren (mit $c_1=0$). Folglich können beide Beziehungen in eine bezugsinvariante Standarddarstellung gemäß der oberen Zeile in Gleichung (2.-5) überführt werden, aus der mit $c_1=0$ die Bestimmungselemente $s(p^*)$ und γ abzulesen sind, die zur Berücksichtigung der Temperaturabhängigkeit der Stoffwerte in der Einflussgrößenliste des hier vorliegenden Problems zu berücksichtigen sind. Wenn man nun noch die willkürlich festzulegende Bezugstemperatur prozessbezogen zu T_u setzt, geht die Einflussgrößenliste (3.-71) über in

$$\delta_L = f(\lambda_u, \rho, c_{p,u}, S_L, T_u, T_b, \gamma_\lambda, \gamma_{c_p}), \quad (3.-73)$$

mit $\lambda_u = \lambda(T_u)$ und $c_{p,u} = c_p(T_u)$. Hiernach schließt man auch ohne erneute Rechnung auf das Ergebnis einer erweiterten Dimensionsanalyse,

$$\frac{\delta_L \rho c_{p,u} S_L}{\lambda_u} = F\left(\frac{T_b}{T_u}, \gamma_\lambda, \gamma_{c_p}\right), \quad (3.-74)$$

worin der Einfluss von γ_{c_p} weitgehend vernachlässigbar sein dürfte. Als Gleichungsansatz käme in Betracht:

$$\frac{\delta_L \rho c_{p,u} S_L}{\lambda_u} = C \left(\frac{T_b}{T_u}\right)^{\gamma_\lambda}. \quad (3.-75)$$

Für die später in **Kap. 3.11** beschriebenen Untersuchungen wurde verwendet: $\gamma_\lambda = 0,794$ und $C = 1,84$.

Wenn die in **Bild 3.26** skizzierte freie laminare Flamme an eine kalte isotherme Wand anläuft, erfährt das Temperaturprofil vor der Reaktionszone wegen der starken Kühlwirkung der Wand eine erhebliche Verzerrung und Absenkung.

Dadurch fällt die stark temperaturabhängige Reaktionsgeschwindigkeit schnell ab und in einer gewissen Entfernung von der Wand, dem sogenannten Quenchabstand, kommt es zum Erlöschen der Reaktionstätigkeit.

Für den Quenchabstand δ_Q können die Einflussgrößen in der Argumentliste der Gleichung (3.-73) übernommen werden. Es ist aber (mindestens) noch die Wandtemperatur T_W hinzuzunehmen:

$$\delta_Q = f(\lambda_u, \rho, c_{p,u}, S_L, T_u, T_b, T_W, \gamma_\lambda, \gamma_{c_p}). \quad (3.-76)$$

Mit Blick auf die Gleichung (3.-74) lässt sich das Ergebnis der nun durchzuführenden Dimensionsanalyse auch ohne Rechnung angeben:

$$\frac{\delta_Q \rho c_{p,u} S_L}{\lambda_u} = G \left(\frac{T_b}{T_u}, \frac{T_W}{T_u}, \gamma_\lambda, \gamma_{c_p} \right). \quad (3.-77)$$

Hiernach sollte zwischen dem Quenchabstand und der Flammendicke eine Beziehung der Form

$$\frac{\delta_Q}{\delta_L} = H \left(\frac{T_b}{T_u}, \frac{T_W}{T_u}, \gamma_\lambda, \gamma_{c_p} \right) \quad (3.-78)$$

bestehen.

Nebenbemerkung: Für die Zeit Δt_R , die während des Vorrückens der Flamme um den Betrag der Flammendicke δ_L vergeht, gilt eine Abhängigkeit

$$\Delta t_R = f(\text{kinetische Daten, spez. Heizwert,}), \quad (3.-79)$$

die insbesondere die kinetischen Daten der involvierten chemischen Reaktionen und den spezifischen Heizwert des Kraftstoffes enthält. Hier ist im Moment nur von Interesse, dass eine physikalische Größe Δt_R der beschriebenen Art existiert. Dann kann mit Gleichung (3.-75) für die laminare Flammengeschwindigkeit geschrieben werden

$$S_L = \frac{\delta_L}{\Delta t_R} = C \frac{\lambda_u}{\rho S_L c_{p,u} \Delta t_R} \left(\frac{T_b}{T_u} \right)^{\gamma_\lambda} \quad (3.-80)$$

oder umgeformt

$$S_L = C^{1/2} \sqrt{\frac{\lambda_u}{\rho c_{p,u} \Delta t_R}} \left(\frac{T_b}{T_u} \right)^{\gamma_\lambda/2}. \quad (3.-81)$$

3.10 Turbulenzintensität im Verbrennungsmotor

Beim Betrieb von Verbrennungsmotoren entsteht durch den Ansaugvorgang eine turbulente Innenströmung. Im Folgenden wird das zeitliche Verhalten der dabei

	in der Zuströmung
s, D	Kolbenhub und Zylinderdurchmesser
ε	Verdichtungsverhältnis, $\varepsilon = V_{uT} / V_{oT}$
l_p	Pleuellänge
l_i	Geometriedaten von Zylindereinlass und Kolbenboden ($i = 1, \dots, k$)

Aus experimentellen Grundlagenuntersuchungen /z. B. 7/ ist bekannt, dass der Verlauf der Turbulenzintensität über dem Kurbelwinkel von Zyklus zu Zyklus zufälligen Schwankungen unterworfen ist. Zur Erfassung dieses Sachverhaltes wurde in der obigen Einflussgrößenliste mit der mittleren Geschwindigkeitsstörung v'_s in der Ansaugströmung eine zufällig veränderliche Größe aufgenommen.

Die Dimensionsanalyse ist in einem $\{M, L, T, \Theta\}$ -System durchzuführen. Dabei lassen sich einige der obigen Einflussgrößen schon ohne Rechnung zu offensichtlichen Dimensionslosen verbinden, wobei aber die Anzahl der Größen noch nicht geändert wird:

$$\overline{v'} / sn = f(\varphi, n, \rho_0, T_0, R, c_p / R, \eta, v'_s / sn, s, s / D, \varepsilon, l_p / s, l_i / s (i = 1, \dots, k)) \quad (3.-83)$$

Zu den verbliebenen dimensionsbehafteten Einflussgrößen gehört die Dimensionstafel ① in **Bild 3.29**.

①	M	L	T	Θ	②	M	L	T	③	M	L
n	0	0	-1	0	n	0	0	-1	$n / \sqrt{RT_0}$	0	-1
ρ_0	1	-3	0	0	ρ_0	1	-3	0	ρ_0	1	-3
T_0	0	0	0	1	RT_0	0	2	-2	$\eta / \sqrt{RT_0}$	1	-2
R	0	2	-2	-1	η	1	-1	-1	s	0	1
η	1	-1	-1	0	s	0	1	0			
s	0	1	0	0	④			M	⑤		
					$ns / \sqrt{RT_0}$	0	$ns / \sqrt{RT_0}$				
					$\rho_0 s^3$	1	$\rho_0 s \sqrt{RT_0} / \eta$				
					$\eta s^2 / \sqrt{RT_0}$	1					

Bild 3.29: Dimensionstafel ① zu Gleichung (3.-83) und nachfolgende Eliminierung der Spaltenvektoren

Mit den nach Eliminierung der Spaltenvektoren resultierenden beiden Dimensionslosen in Tafel ⑤ erhält man unter Hinzunahme der bereits vorher gefundenen offensichtlichen Dimensionslosen in Gleichung (3.-83) den dimensionslosen Zusammenhang

$$\frac{\overline{v'}}{sn} = F \left(\varphi, \frac{\rho_0 s \sqrt{RT_0}}{\eta}, \frac{sn}{\sqrt{RT_0}}, \frac{c_p}{R}, \frac{v'_s}{sn}, \varepsilon, \frac{s}{D}, \frac{l_p}{s}, \frac{l_{i(i=1, \dots, k)}}{s} \right). \quad (3.-84)$$

Mit den Potenzproduktumwandlungen

$$\frac{\bar{v}'}{sn} \times \frac{sn}{\sqrt{RT_0}} = \frac{\bar{v}'}{\sqrt{RT_0}} \quad \text{und} \quad \frac{\rho_0 s \sqrt{RT_0}}{\eta} \times \frac{sn}{\sqrt{RT_0}} = \frac{\rho_0 s^2 n}{\eta}$$

kann noch in die dimensionstheoretisch gleichwertige Formulierung

$$\frac{\bar{v}'}{\sqrt{RT_0}} = F \left(\varphi, \frac{\rho_0 s^2 n}{\eta}, \frac{sn}{\sqrt{RT_0}}, \frac{c_p}{R}, \frac{v'_S}{sn}, \varepsilon, \frac{s}{D}, \frac{l_P}{s}, \frac{l_{i(i=1, \dots, k)}}{s} \right) \quad (3.-85)$$

umgeschrieben werden. Hierin sind die zweite und die dritte Dimensionslose in der Argumentklammer von der Struktur einer Reynolds- bzw. einer Machzahl.

In der vorstehenden Entwicklung wurde der Kolbenhub als charakteristisches Maß für die offensichtlich bedeutsame mit einem Hub verbundene Volumenänderung, dem Hubvolumen, gewählt. Das Letztere ist deshalb erst über das Hubverhältnis s/D festgelegt, wodurch in Gleichung (3.-85) dieser Größe (etwas unglücklich) ein sehr hohes Einflussgewicht zukommt. Dies lässt sich ohne erneute Durchführung der Dimensionsanalyse ändern, indem man über die Umformung

$$V_h^{1/3} = \left(D^2 \frac{\pi}{4} s \right)^{1/3} = \left(\frac{D^2}{s^2} \frac{\pi}{4} s^3 \right)^{1/3} \sim \left(\frac{D}{s} \right)^{2/3} s \quad (3.-86)$$

vom Kolbenhub s auf die Potenz $V_h^{1/3}$ des Hubvolumens übergeht. Damit wird aus Gleichung (3.-85)

$$\frac{\bar{v}'}{\sqrt{RT_0}} = F \left(\varphi, \frac{\rho_0 V_h^{2/3} n}{\eta}, \frac{V_h^{1/3} n}{\sqrt{RT_0}}, \frac{c_p}{R}, \frac{v'_S}{V_h^{1/3} n}, \varepsilon, \underbrace{\frac{V_h^{1/3}}{D}, \frac{l_P}{V_h^{1/3}}, \frac{l_{i(i=1, \dots, k)}}{V_h^{1/3}}}_{\Pi_{Geo}} \right), \quad (3.-87)$$

worin der Variablen $V_h^{1/3}/D$ kein herausragendes Einflussgewicht innerhalb des Variablenkomplexes Π_{geo} mehr zufällt.

Als Gleichungsansatz zwischen den gefundenen problemrelevanten Dimensionslosen wird (teilweise mit Blick auf die allgemeinen Ansatzformen in **Kap. 2.4**) formuliert:

$$\frac{\bar{v}'}{\sqrt{RT_0}} = C_1 \frac{\rho_0 V_h^{2/3} n}{\eta} \left(1 + C_2 \frac{V_h^{1/3} n}{\sqrt{RT_0}} \right) \times \exp \left[C_3 \frac{\widehat{v'_S}}{V_h^{1/3} n} \left(\frac{v'_S}{\widehat{v'_S}} - 1 \right) \right] \times g(\varphi). \quad (3.-88)$$

Hierbei wurde c_p/R als Konstante angesehen. Die Abhängigkeit von der dimensionslosen Störvariablen $v'_S/V_h^{1/3} n$ wurde unter Differenzbildung mit dem Ensemblemittelwert $\widehat{v'_S}/V_h^{1/3} n$ dieser Variablen eingeführt. Dabei sorgt die Exponentialfunktion dafür, dass diese Abhängigkeit für $v'_S/\widehat{v'_S} = 1$ verschwindet. Über die zufälligen Abweichungen dieses Quotienten von eins kommen dann die Arbeitsspielvariationen zum Ausdruck. Mit $C_3 \widehat{v'_S}$ größer oder kleiner $V_h^{1/3} n$ sollte es möglich sein, das Ausmaß von experimentell beobachteten Variationen rechnerisch nachzubilden. Die Koeffizienten C_1 und C_2 sind als Funktionale der dimensionslosen Geometrieparameter Π_{Geo} in Gleichung (3.-87) aufzufassen.

Eine allgemeine Beschreibung der Abhängigkeit $g(\varphi)$ vom Kurbelwinkel dürfte nicht leicht fallen. Für einen bestimmten Wert φ^* des Kurbelwinkels kann man aber $g(\varphi^*)$ in den Koeffizienten C_1 hineinziehen. Die Gleichung (3.-88) wird damit zu einer Näherungsgleichung für die mittlere Turbulenzintensität in einem gewissen Intervall $\varphi_1 < \varphi^* < \varphi_2$. Auf diese Weise lässt sich z. B. eine halbempirische Beziehung für die mittlere Turbulenzintensität gegen Ende des Verdichtungshubes gewinnen, die eine wichtige Einflussgröße für die zeitliche Entwicklung der Flammenfaltung während der Verbrennung im Ottomotor darstellt (vergl. **Kap. 3.11**).

3.11 Flammenfaltung bei der Verbrennung im Ottomotor

Dieses Beispiel soll zeigen, wie dimensionsanalytische Überlegungen sich bei der experimentellen Erforschung eines technisch-physikalischen Sachverhaltes als hilfreich erweisen können.

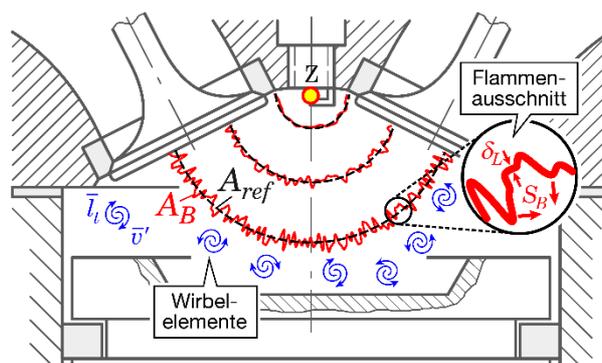


Bild 3.30: Turbulente Flammenausbreitung im Ottomotor

In Simulationsprogrammen zur Berechnung des Arbeitsprozesses in Ottomotoren benötigt man u. a. ein realitätsnahes Rechenmodell des in **Bild 3.30** skizzierten zeitlichen Verbrennungsablaufes. Von der Zündkerze ausgehend durchläuft eine ihrer Struktur nach im Wesentlichen laminare Flamme den mit einem turbulenten Frischgas gefüllten Brennraum bis sie an den Wänden anläuft und dort erlischt. Der mikroskopische Zustand des Frischgases ist durch die regellose Bewegung von Wirbelelementen gekennzeichnet (vergl. **Kap. 3.10**). Dabei sind die Abmessungen dieser Wirbelelemente deutlich bis erheblich größer als die Dicke der Flamme. Durch die Interaktion der Wirbelelemente mit der anfänglich noch weitgehend glatten Flamme wird dieselbe (ohne signifikante Störung ihrer inneren Struktur) zunehmend deformiert, gewinkelt, aufgefaltet und eventuell auch aufgerissen mit der Folge, dass sich die Flammenoberfläche, auf der die Verbrennung fortschreitet, unter Umständen erheblich vergrößert. Dieser Effekt, der zu einem entsprechend gesteigerten zeitlichen Brennumsatz des Frischgases führt, ist für den Verbrennungsablauf in Ottomotoren von ausschlaggebender Bedeutung. Im Folgenden geht es um die formelmäßige Erfassung dieses Effektes.

Zur Quantifizierung der durch die Auffaltung der Flamme vergrößerten Oberfläche A_B (in **Bild 3.30** rot ausgezogen), auf der die Verbrennung mit der Geschwindigkeit S_L fortschreitet, bezieht man diese auf eine in geeigneter Weise festgelegte glatte Referenzfläche A_{ref} (schwarz gestrichelt). Der so gebildete Quotient A_B/A_{ref} wird als Flammenfaltung bezeichnet. Die wesentlichen Einflussgrößen hierauf sind im Bild eingetragen:

$$\frac{A_B}{A_{ref}} = f(\bar{v}', \bar{l}_t, S_L, \delta_L, \Delta t) \quad \bar{l}_t \gg \delta_L \quad (3.-89)$$

$\frac{A_B}{A_{ref}}$	Flammenfaltung
\bar{v}'	Mittlere Turbulenzintensität während der Verbrennung
\bar{l}	Mittleres charakteristisches Längenmaß der Wirbelemente während der Verbrennung
S_L	Laminare Brenngeschwindigkeit relativ zum Frischgas
δ_L	Laminare Flammendicke
Δt	Zeitspanne seit dem Beginn der turbulenten Flammenentwicklung an der Zündkerze

Man beginnt hier zweckmäßig mit einer Dimensionsanalyse im $\{L, T\}$ -System.

①	L	T		②	L		③
\bar{v}'	1	-1		$\bar{v}'\Delta t$	1		$\bar{v}'\Delta t / \delta_L$
\bar{l}_t	1	0		\bar{l}_t	1		\bar{l} / δ_L
S_L	1	-1		$S_L\Delta t$	1		$S_L\Delta t / \delta_L$
δ_L	1	0		δ_L	1		
Δt	0	1					

Bild 3.31: Dimensionstafel ① zu Gleichung (3.-89) und nachfolgende Eliminierung der T - und L -Spalte

Mit den nach der sukzessiven Spalteneliminierung erhaltenen dimensionslosen folgt der dimensionslose Zusammenhang

$$\frac{A_B}{A_{ref}} = F\left(\frac{\bar{v}'\Delta t}{\delta_L}, \frac{\bar{l}_t}{\delta_L}, \frac{S_L\Delta t}{\delta_L}\right). \quad (3.-90)$$

Für die folgenden Ausführungen ist es hilfreich, diesen Zusammenhang über die Potenzproduktumwandlung

$$\frac{\bar{v}'\Delta t}{\delta_L} \times \frac{\delta_L}{S_L\Delta t} = \frac{\bar{v}'}{S_L} \quad (3.-91)$$

umzuschreiben in die dimensionstheoretisch gleichwertige Formulierung

$$\frac{A_B}{A_{ref}} = \tilde{F}\left(\frac{\bar{v}'\Delta t}{\delta_L}, \frac{\bar{l}_t}{\delta_L}, \frac{\bar{v}'}{S_L}\right), \quad (3.-92)$$

die für eine stationäre turbulente Flamme übergeht in

$$\left(\frac{A_B}{A_{ref}}\right)_{stat} = G\left(\frac{\bar{l}_t}{\delta_L}, \frac{\bar{v}'}{S_L}\right). \quad (3.-93)$$

Im Hinblick auf die Entwicklung eines Gleichungsansatzes zwischen den gefundenen Dimensionslosen stehen die folgenden empirischen Sachverhalte zur Verfügung:

1) Aus experimentellen Untersuchungen ist bekannt, dass sich die Flammenfaltung von stationären turbulenten Flammen recht gut durch den Funktionsansatz

$$\left(\frac{A_B}{A_{ref}}\right)_{stat} = 1 + c \left(\frac{\bar{v}'}{S_L}\right)^x \quad (3.-94)$$

approximieren lässt /z. B. 7/. Dieser Ansatz ist mit dem Ergebnis der Dimensionsanalyse in Gleichung (3.-93) kompatibel. Allerdings tritt hierin die zweite Dimensionslose \bar{l}_t / δ_L nicht auf. Dies dürfte bedeuten, dass der Einfluss der Dimensionslosen \bar{v}' / S_L dominant ist und dass die Werte c und x in gewissem Maße davon abhängen, in welchem Wertebereich der \bar{l}_t / δ_L man sich jeweils bewegt.

2) Aus anderen experimentellen Untersuchungen an *instationären* turbulenten Freiflammen /5/, die durch einen Zündfunken ausgelöst wurden sowie aus Brennungen in einem Einhubtriebwerk /6/ ist abzuleiten, dass die Flammenfaltung kurz nach der Zündung noch in der Nähe von eins liegt, dann aber mit zunehmender Zeit degressiv ansteigt in einer Weise, die an die mathematische Funktion $1 - \exp(-z)$ denken lässt. Hierbei müsste z eine deutliche Abhängigkeit von der Zeit enthalten.

Dementsprechend wird für die Faltung der instationären turbulenten Flamme formuliert

$$\frac{A_B}{A_{ref}} = 1 + c \left(\frac{\bar{v}'}{S_L}\right)^x \times \left[1 - \exp\left(-\frac{1}{a} Z \Delta t\right)\right]. \quad (3.-95)$$

a Empirischer Koeffizient (dimensionslos)

$Z \Delta t$ „Dimensionslose Zeit“ (der Ausdruck Z ist noch festzulegen)

Dieser Gleichungsansatz erfüllt die zu fordernden Randbedingungen: Für $\Delta t = 0$ ist $A_B / A_{ref} = 1$ und für sehr große Zeiten geht die Faltung gegen $(A_B / A_{ref})_{stat}$.

Zur Ausformulierung des dimensionslosen Terms $Z \Delta t$ im Argument der Exponentialfunktion sind noch einige Überlegungen erforderlich. Mit Blick auf den dimensionslosen Zusammenhang in Gleichung (3.-92) würde man vielleicht ohne Weiteres $Z \Delta t = \bar{v}' \Delta t / \delta_L$ setzen wollen. Hier ist jedoch zu beachten, dass sich durch Potenzproduktumwandlung unter den Dimensionslosen im Argument von Gleichung (3.-92) auch andere dimensionstheoretisch gleichwertige Formen einer „dimensionslosen Zeit“ $Z \Delta t$ bilden lassen:

$$Z\Delta t = \left\{ \underbrace{\frac{\bar{v}'\Delta t}{\delta_L}}_{\textcircled{1}}, \underbrace{\frac{\bar{v}'\Delta t}{\bar{l}}}_{\textcircled{2}}, \underbrace{\frac{S_L\Delta t}{\bar{l}}}_{\textcircled{3}}, \underbrace{\frac{S_L\Delta t}{\delta_L}}_{\textcircled{4}} \right\} \quad (3.-96)$$

Die Formen ① und ② enthalten eine Abhängigkeit von der Turbulenzintensität. Demzufolge würde die Zeitspanne bis zum Erreichen des stationären Falles mit zunehmender Turbulenzintensität kürzer. Im Gegensatz hierzu hätte nach den Formen ③ und ④ die Turbulenzintensität keinen Einfluss auf diese Übergangszeit. Weil der Verfasser Letzteres für physikalisch nicht plausibel hält, möchte er die weitere Auswahl auf die beiden ersten Formen beschränken. Das in der Form ② auftretende turbulente Längenmaß ist von vornherein wegen der Bedingung für den Bereich der „gefalteten Flammen“ $\bar{l}_t \gg \delta_L$ von kleinen Werten ausgeschlossen. Zunehmende Werte des turbulenten Längenmaßes oberhalb dieses unscharfen Grenzbereiches würden die zeitliche Entwicklung der Faltung behindern und in Richtung auf eine Verlängerung der Zeitspanne bis zum Erreichen des stationären Falles wirken. Dies erscheint physikalisch plausibel, so dass die Form ② in Betracht zu ziehen ist. Dasselbe gilt hinsichtlich der Form ①, nach der dünne Flammen die Faltung fördern und damit den Übergang zum stationären Fall beschleunigen sollten. Zur Entscheidung zwischen den beiden Formen ① und ② sind weitere Untersuchungen erforderlich. Dabei sind noch die hervorstechenden Unterschiede zwischen diesen Formen zu vermerken. Die Form ② enthält nur Parameter des Turbulenzfeldes, in dem die Flammenausbreitung erfolgt. Dagegen gehen in die Form ① über die Flammendicke (vergl. **Kap. 3.9**) auch Stoffgrößen und insbesondere die Dichte des Gasraumes in die zeitliche Entwicklung der Auffaltung ein. Mit Gleichung (3.-75) kann die Form ① der „dimensionslosen Zeit“ umgeschrieben werden in

$$\frac{\bar{v}'\Delta t}{\delta_L} = C^{-1} \frac{\rho S_L c_{p,u} \bar{v}'\Delta t}{\lambda_u} \left(\frac{T_b}{T_u} \right)^{-x}, \quad (3.-97)$$

wonach eine zunehmende Dichte die Flammenfaltung beschleunigen sollte.

Zur Entscheidungsfindung zwischen den beiden Formen ① und ② wurden sogenannte Brennverlaufsauswertungen der an einem Serien-Ottomotor bei unterschiedlichen Lasten und Drehzahlen gemessenen Druckverläufe über dem Kurbelwinkel durchgeführt. Die Ergebnisse dieser Auswertungen wurden dann mit dem eingangs erwähnten Simulationsprogramm der ottomotorischen Verbrennung nachgerechnet, in dem die Gleichung (3.-95) zur Beschreibung der Flammenfaltung implementiert wurde. Durch eine Abstimmung der zu der Form ① bzw. der Form ② gehörigen unbestimmten Koeffizienten wurde sodann versucht, eine möglichst gute Übereinstimmung zwischen den Versuchsergebnissen und der Nachrechnung zu erzielen.

Die dabei zur Bestimmung der Flammenfaltung erforderliche Bezugsfläche A_{ref} wurde so festgelegt wie in **Bild 3.30** skizziert: als die Oberfläche einer *gedachten Kugelflamme*, wie sie sich (aus Symmetriegründen) bei der Flammenausbreitung

in eine ruhende Gasatmosphäre einstellen würde. Der Radius der Kugel (Mittelpunkt am Zündort) wird dabei stets so bemessen, dass das von ihr aus dem Brennraum ausgeschnittene Volumen gleich dem momentanen Verbrennungsgasvolumen hinter der Flamme ist. Die dann auf der Kugel von der Brennraumberandung ausgeschnittene Durchdringungsfläche ist die Referenzfläche.

Bild 3.32 zeigt die Untersuchungsergebnisse, die mit der Form ① der „dimensionslosen Zeit“ erhalten wurden. Der zeitliche Verlauf der Flammenfaltung bestimmt die Anstiegsflanke und das Maximum eines Brennverlaufes. Es ist zu ersehen, dass in dieser Hinsicht für alle Motorbetriebspunkte *BP 1 - 6* eine zufriedenstellende Übereinstimmung zwischen den Ergebnissen der Druckverlaufsauswertung (gestrichelte Linienzüge) und denen der Nachrechnung mit dem Simulationsprogramm (ausgezogene Linienzüge) zu erreichen war. Dabei wurde die folgende Abstimmung der Koeffizienten in der Gleichung für den zeitlichen Verlauf der Flammenfaltung gefunden:

$$\frac{A_B}{A_{ref}} = 1 + c \left(\frac{\bar{v}'}{S_L} \right)^x \left[1 - \exp \left(-\frac{1}{a} \frac{\bar{v}' \Delta t}{\delta_L} \right) \right], \quad (c = 4,0; \quad x = 0,785; \quad a = 900). \quad (3.-98)$$

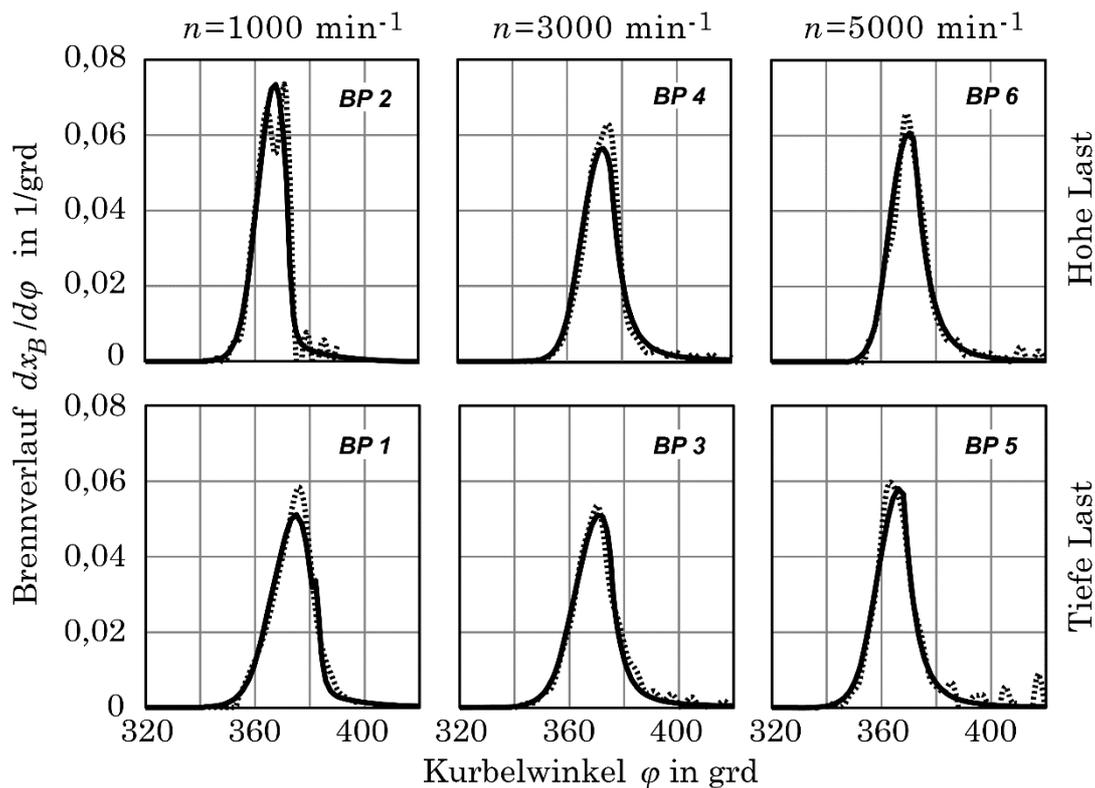


Bild 3.32: Brennvorgangsauswertungen an einem Vierventil-Serien-Ottomotor (Betriebspunkte *BP 1 - 6*); Versuchsergebnisse (*gestrichelt*) und Nachrechnung mit der Form ① der „dimensionslosen Zeit“ (*ausgezogen*).
(Zu *BP 2*: Die Verbrennung ist durch eine milde Selbstzündung überlagert)

Die zu den Betriebspunkten *BP 1 - 6* gehörigen zeitlichen Verläufe der Flammenfaltung sind in **Bild 3.33** dargestellt.

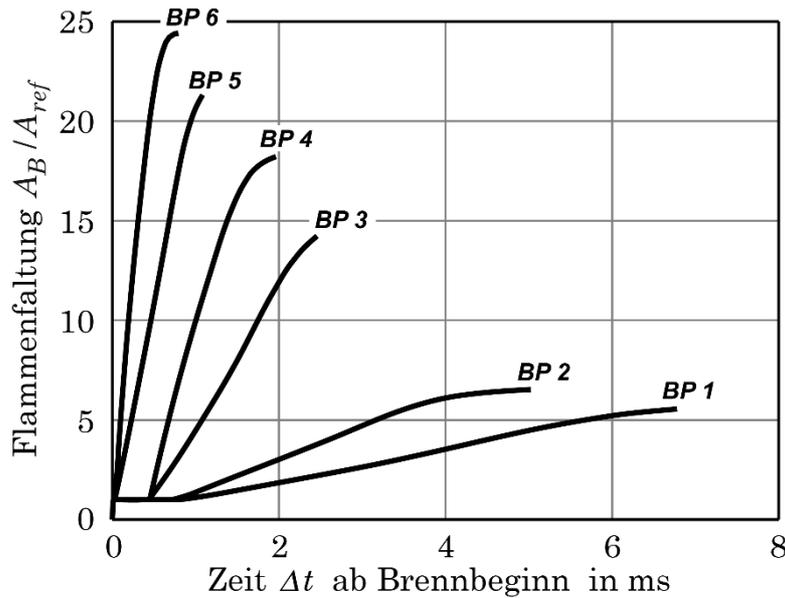


Bild 3.33: Zeitliche Verläufe der Flammenfaltung für die Motorbetriebspunkte *BP 1 - 6* in **Bild 3.32**

Offenbar wird der Verlauf der Flammenfaltung über der Zeit in sehr starker Weise durch die Motordrehzahl, aber auch noch durch die Last beeinflusst. Dabei wirken steigende Motordrehzahlen über eine mit der Drehzahl zunehmende Turbulenzintensität, und erhöhte Lasten über eine damit verbundene Dichtezunahme während der Verbrennung. Hier wird deutlich, dass die Formen ③ und ④ der „dimensionslosen Zeit“, in denen die Turbulenzintensität gar nicht vorkommt, zu Recht unberücksichtigt geblieben sind.

Mit der ebenfalls in Betracht gezogenen Form ② lässt sich der Drehzahleinfluss auf den zeitlichen Faltungsverlauf praktisch genauso gut beschreiben wie mit der Form ①, allerdings nur bei annähernd konstanter Last. Dies liegt daran, dass die Form ② keinen Einfluss der Dichte enthält, die mit der Last veränderlich ist.

3.12 Durchbiegung des Freitragers

Die Formel für die Durchbiegung am freien Ende eines Freitragers ist aus Taschenbüchern zu entnehmen:

	$\frac{f_m}{l} = \frac{1}{3} \frac{F l^2}{E I}$	(3.-99)
--	---	---------

Die Behandlung dieses Beispiels mit bekanntem Ergebnis soll zeigen, dass es manchmal einiger Überlegung bedarf, um dasjenige Grundgrößensystem zu finden, in dem die Dimensionsanalyse bezüglich einer vorgelegten Einflussgrößenliste zu einem optimalen Ergebnis führt.

Aus der vorstehenden Gleichung liest man die Einflussgrößenliste für die Durchbiegung ab:

$$f_m = g(F, l, E, I) \quad (3.-100)$$

- f_m Durchbiegung am freien Ende
- F Angreifende Kraft am freien Ende
- l Länge des Freitragers
- E Elastizitätsmodul des Trägermaterials
- I Flächenträgheitsmoment des Trägers

In **Bild 3.34** sind die zu der vorstehenden Einflussgrößenliste im $\{M, L, T\}$ - bzw. im äquivalenten $\{F, L, T\}$ -System gehörigen Dimensionstabellen dargestellt. Hier zeigt es sich, dass im $\{F, L, T\}$ -System die Zeit als Grundgröße nicht benötigt wird, so dass die Behandlung im $\{F, L\}$ -System fortgeführt werden kann. Eine Dimensionsanalyse liefert in beiden Grundgrößensystemen denselben dimensionslosen Zusammenhang, z. B.

$$\frac{f_m}{l} = G\left(\frac{F}{El^2}, \frac{l^4}{I}\right) \quad (3.-101)$$

	M	L	T
f_m	0	1	0
F	1	1	-2
l	0	1	0
E	1	-1	-2
I	0	4	0

	F	L	T
f_m	0	1	0
F	1	0	0
l	0	1	0
E	1	-2	0
I	0	4	0

Bild 3.34: Dimensionstabellen zu Gleichung (3.-100)

Dieses Ergebnis steht offensichtlich nicht mit der bekannten Gleichung (3.-99) in Einklang. Durch die Potenzproduktumwandlung

$$\frac{F}{El^2} \times \frac{l^4}{I} = \frac{Fl^2}{EI} \quad (3.-102)$$

kann zwar das auf der rechten Seite der Durchbiegungsformel stehende Potenzprodukt gebildet werden, es lässt sich aber nicht mit Bestimmtheit erschließen und außerdem hat die Dimensionsanalyse gegenüber der Durchbiegungsformel ein Potenzprodukt zu viel ergeben.

Nach diesem Sachverhalt sollte es möglich sein, ein anderes Grundgrößensystem anzugeben, in dem die Dimensionsanalyse auf ein Resultat führt, das mit der Durchbiegungsformel (3.-99) zusammenpasst. In dieser Hinsicht hilft hier ein näherer Blick auf die Berechnungsformel für das Flächenträgheitsmoment

$$I = \int_A x^2 dA \quad (3.-103)$$

worin x den senkrechten Abstand des Flächenelementes dA zur Trägerachse bezeichnet. Die Integration ist über die Querschnittsfläche des Trägers auszuführen. Man bemerke nun, dass die Größe der in das Flächenträgheitsmoment eingehenden Querschnittsfläche A weder mit den Abstandskordinaten x noch mit den sonstigen problemrelevanten Längen in der Einflussgrößenliste (3.-100) in irgendeinem Zusammenhang steht. Deshalb kann in diesem speziellen Fall die Fläche A als eine zusätzliche Grundgrößenart aufgefasst werden, und zwar ohne dass die Einführung einer Dimensionskonstante erforderlich wäre. Die Dimensionsanalyse ist nun in einem $\{F, L, A\}$ -System erneut durchzuführen, in dem das Flächenträgheitsmoment nicht mehr die Dimension L^4 (vergl. **Bild 3.34**), sondern die Dimension $[I] = L^2 A$ hat. Die Dimension des Elastizitätsmoduls erfährt eine analoge Änderung in $[E] = FA^{-1}$.

In **Bild 3.35** sind die zur Einflussgrößenliste (3.-100) gehörige Dimensionstafel im $\{F, L, A\}$ -System und rechts anschließend die Schritte zur sukzessiven Eliminierung der Spaltenvektoren dargestellt.

Das Ergebnis der Dimensionsanalyse

①	F	L	A	②	F	L	③	F	④
f_m	0	1	0	f_m	0	1	f_m / l	0	f_m / l
F	1	0	0	F	1	0	F	1	Fl^2 / EI
l	0	1	0	l	0	1	EI / l^2	1	
E	1	0	-1	EI	1	2			
I	0	2	1						

Bild 3.35: Dimensionstafel ① zu Gleichung (3.-100) im $\{F, L, A\}$ -System und Eliminierung der Spaltenvektoren

$$\frac{f_m}{l} = G \left(\frac{Fl^2}{EI} \right) \quad (3.-104)$$

entspricht nun voll der Durchbiegungsformel (3.-99).

Anmerkung: Eine Entwicklung, die zu demselben Ergebnis führt, kann auch in einem (auf den ersten Blick etwas befremdlich erscheinenden) $\{F, L_1, L_2\}$ -System erfolgen, in dem zwei *unterschiedliche Kategorien* von Längen als Grundgrößenarten eingeführt werden. Die Längen L_1 der ersten Kategorie umfassen die weiter oben für die Bildung des Flächenträgheitsmoments verwendeten Abstandskordinaten x und die problemrelevanten Längen in der Einflussgrößenliste (3.-100). Zu den Längen L_2 der zweiten Kategorie gehören hingegen die Abmessungen, die den Trägerquerschnitt einschließlich seiner Fläche festlegen. In diesem alternativen Grundgrößensystem hat das Flächenträgheitsmoment die Dimension $[I] = L_1^2 L_2^2$ und der Elastizitätsmodul die Dimension $[E] = FL_2^{-2}$.

3.13 Luftwiderstand eines PKW

Ein Fahrzeug (z. B. PKW in **Bild 3.36**) erfährt bei der Straßenfahrt einen Luftwiderstand. Die hierfür maßgebenden Einflussgrößen sind in der Skizze eingetragen.

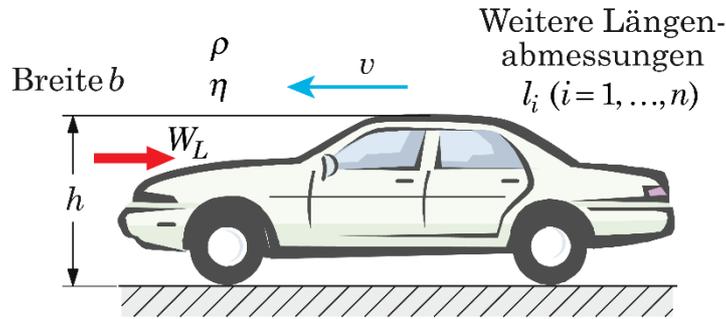


Bild 3.36: Luftwiderstand eines PKW bei Straßenfahrt

Hiernach gilt für den Luftwiderstand die folgende Einflussgrößenliste:

$$W_L = f\left(v, \rho, \eta, h, \frac{b}{h}, \frac{l_1}{h}, \dots, \frac{l_n}{h}\right) \quad (3.-105)$$

- W_L Luftwiderstand
- v Fahrgeschwindigkeit
- ρ Luftdichte
- η Dynamische Viskosität der Luft
- h, b Höhe und Breite des Fahrzeugs (Kastenmaße)
- l_1, \dots, l_n Weitere Längenmaße zur detaillierten Beschreibung der relevanten Fahrzeugabmessungen

In der obigen Einflussgrößenliste wurden bereits die Geometrieparameter, ausgenommen die Fahrzeughöhe, durch Division mit derselben dimensionslos gemacht. Hiernach erhält man für die verbliebenen dimensionsbehafteten Einflussgrößen die in **Bild 3.37** links stehende Dimensionstafel im $\{M, L, T\}$ -System.

①	M	L	T
W_L	1	1	-2
v	0	1	-1
ρ	1	-3	0
η	1	-1	-1
h	0	1	0

②	M	L
W_L/v^2	1	-1
ρ	1	-3
η/v	1	-2
h	0	1

③	M
$W_L h/v^2$	1
ρh^3	1
$\eta h^2/v$	1

④
$W_L/\rho v^2 h^2$
$vh\rho/\eta$

Bild 3.37: Dimensionstafel ① zu Gleichung (3.-105) und nachfolgende Eliminierung der Spaltenvektoren

Nach der Eliminierung der Spaltenvektoren folgt unter Hinzunahme der bereits erhaltenen Dimensionslosen in Gleichung (3.-105) der dimensionslose Zusammenhang

$$\frac{W_L}{\rho v^2 h^2} = F\left(\frac{vh\rho}{\eta}, \frac{b}{h}, \frac{l_1}{h}, \dots, \frac{l_n}{h}\right). \quad (3.-106)$$

Durch Multiplikation mit $2h/b$ und durch Einführung der Referenzfläche $A = bh$ lässt sich diese Gleichung umschreiben in

$$\underbrace{\frac{2 W_L}{\rho v^2 A}}_{c_W} = F^* \left(\frac{v h \rho}{\eta}, \frac{b}{h}, \frac{l_1}{h}, \dots, \frac{l_n}{h} \right). \quad (3.-107)$$

Hierin ist c_W der bekannte Luftwiderstandsbeiwert. Die erste Dimensionslose in der Klammer ist von der Struktur her eine Reynoldszahl.

Im Hinblick auf einen projektierten, d. h. noch nicht existierenden PKW werden oftmals Widerstandsmessungen an einem verkleinerten Modell im Windkanal durchgeführt, die Aufschluss über den Luftwiderstandsbeiwert des auszuführenden PKW geben sollen.

Dabei gilt analog zu Gleichung (3.-107) mit den durch eine hochgestellte Tilde gekennzeichneten Modell- und Windkanaldaten

$$\underbrace{\frac{2 \tilde{W}_L}{\tilde{\rho} \tilde{v}^2 \tilde{A}}}_{\tilde{c}_W} = F^* \left(\frac{\tilde{v} \tilde{h} \tilde{\rho}}{\tilde{\eta}}, \frac{\tilde{b}}{\tilde{h}}, \frac{\tilde{l}_1}{\tilde{h}}, \dots, \frac{\tilde{l}_n}{\tilde{h}} \right). \quad (3.-108)$$

Die Funktion F^* ist in beiden Gleichungen dieselbe. Folglich wird der c_W -Wert des auszuführenden PKW mit dem am Modell gemessenen Wert \tilde{c}_W übereinstimmen, wenn dasselbe auch für die Werte aller Dimensionslosen in den Argumentklammern der Gleichungen (3.-107) und (3.-108) der Fall ist. Für die Werte der dimensionslosen Längenverhältnisse lässt sich dies erreichen, indem das Modell geometrisch ähnlich zu dem auszuführenden PKW hergestellt wird. Zur Übereinstimmung der beiden Reynoldszahlen

$$\frac{\tilde{v} \tilde{h} \tilde{\rho}}{\tilde{\eta}} = \frac{v h \rho}{\eta} \quad (3.-109)$$

müssen die dimensionsbehafteten Größen in der links stehenden Zahl in geeigneter Weise gewählt werden. Dabei erfordert ein relativ kleines Modell (wegen $\tilde{v} \tilde{h} \approx konst$) auf jeden Fall eine dementsprechend hohe Strömungsgeschwindigkeit im Windkanal. Inwieweit man auch über die Dichte und die dynamische Zähigkeit in den Wert der Reynoldszahl eingreifen kann, hängt von der Ausführung des Windkanals ab.

3.14 Risswachstum bei schwingender Beanspruchung

Im Schrifttum zur Bruchmechanik findet man die nachstehende empirisch ermittelte **Gleichung von Paris u.a.**, die unter gewissen Voraussetzungen die Risswachstumsgeschwindigkeit in Werkstoffproben bei schwingender Beanspruchung beschreibt.

$$\frac{da}{dN} = C \left[\Delta\sigma \sqrt{\pi a} f\left(\frac{a}{W}\right) \right]^m \quad (3.-110)$$

a	Risslänge
N	Lastspielzahl
$\Delta\sigma$	Nennspannungsausschlag
W	Nennprobenabmessung
C, m	Proben / Werkstoffparameter

Gemäß der obigen Einflussgrößenliste für die Risswachstumsgeschwindigkeit da/dN ist die dimensionsanalytische Untersuchung des Problems zweckmäßig in einem $\{F, L\}$ -System durchzuführen.

Hierbei ist zunächst festzustellen, dass die Gleichung (3.-110) keine korrekte physikalische Gleichung darstellen kann. Bei dem auf der rechten Gleichungsseite auftretenden Potenzausdruck handelt es sich nämlich nicht um eine dimensionshomogene Funktion, weil die anscheinend zugehörige Dimension

$$\left[\left[\Delta\sigma \sqrt{\pi a} f\left(\frac{a}{W}\right) \right]^m \right] = \frac{F^m}{L^{3/2m}} \quad (3.-111)$$

in unzulässiger Weise von einer Einflussgröße des Problems (dem Werkstoffparameter m) abhängig ist, d. h. der Ausdruck besitzt faktisch gar keine physikalische Dimension (vergl. Gleichung (1.-7)).

Im Folgenden soll der Versuch einer Korrektur der Gleichung (3.-110) unternommen werden, die diesen Fehler vermeidet.

Eine Überlegung zu den wahrscheinlich maßgebenden Einflussgrößen auf die Risswachstumsgeschwindigkeit führt auf den Einflussgrößenzusammenhang

$$\frac{da}{dN} = g \left(\Delta F, F_m, l_1, \frac{l_2}{l_1}, \dots, \frac{l_n}{l_1}, R_{p0,2}, \frac{E}{R_{p0,2}}, \dots, \begin{matrix} \text{weitere} \\ \text{Werkstoff- und} \\ \text{Gefügeparameter} \end{matrix} \right). \quad (3.-112)$$

ΔF	Kraftausschlag im Pulsversuch
F_m	Mittlere Kraft im Pulsversuch
$l_1 \dots l_n$	Geometriedaten der Probe
$R_{p0,2}$	Dehngrenze
E	Elastizitätsmodul

In diesem Fall ist eine Dimensionsanalyse im $\{F, L\}$ -System sehr leicht durchzuführen. Ohne besondere Rechnung schließt man auf

$$\frac{1}{l_1} \frac{da}{dN} = G \left(\frac{\Delta F}{R_{P0,2} l_1^2}, \frac{\Delta F}{F_m}, \frac{a}{l_1}, \Pi_G, \Pi_W \right). \quad (3.-113)$$

Hierin bezeichnen Π_G die Gesamtheit der dimensionslosen Geometrieparameter der untersuchten Probe und Π_W die Gesamtheit der relevanten dimensionslosen Werkstoff- und Gefügeparameter.

Mit Blick auf die Gleichung von Paris wird als neuer, nun dimensionshomogener Gleichungsansatz formuliert

$$\frac{1}{l_1} \frac{da}{dN} = C(\Pi_G, \Pi_W) \left[\frac{\Delta F}{R_{P0,2} l_1^2} \left(\frac{a}{l_1} \right)^{1/2} f \left(\frac{a}{l_1} \right) \right]^{m(\Pi_G, \Pi_W)}, \quad (3.-114)$$

in dem nun auf der linken und der rechten Seite dimensionslose Ausdrücke stehen. Hierbei blieb die Dimensionslose $\Delta F / F_m$ unberücksichtigt, weil die Mittelkraft F_m in der Gleichung von Paris nicht vorkommt und deshalb eventuell problemirrelevant ist.

3.15 Gemischbildung am Einspritzstrahl

Betrachtet wird der vereinfachte Fall einer Kraftstoffeinspritzung in eine ruhende inerte Gasatmosphäre von Raumtemperatur, bei dem keine Verbrennung und nahezu auch keine Verdampfung stattfinden kann. Unter diesen Randbedingungen werden häufig experimentelle Untersuchungen zur Dieseleinspritzung durchgeführt, um die erheblich komplizierenden Einflüsse der Verdampfung und der Verbrennung auf die Strahlausbildung auszuschalten.

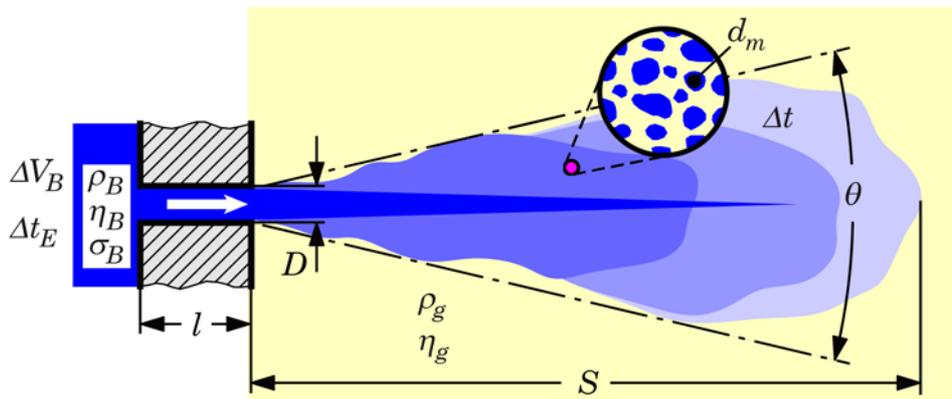


Bild 3.38: Einflussgrößen bei der Einspritzung in eine ruhende inerte Gasatmosphäre von Raumtemperatur

Für die den Einspritzstrahl kennzeichnenden zeitabhängigen Größen - den mittleren Tropfendurchmesser, die Strahleindringtiefe und den Strahlwinkel - gelten die folgenden relativ einfachen Einflussgrößenzusammenhänge

$$\begin{array}{l} d_m = f_1 \\ S = f_2 \\ \theta = f_3 \end{array} \left(\Delta V_B, \Delta t_E, \Delta t, D, l, \rho_B, \eta_B, \sigma_B, \rho_g, \eta_g \right), \quad (3.-115)$$

mit den Bezeichnungen:

d_m	Mittlerer Tropfendurchmesser, gebildet nach einer bestimmten Vorschrift
S	Strahleindringtiefe
θ	Strahlkegelwinkel
ΔV_B	Einspritzvolumen
Δt_E	Einspritzdauer
Δt	Zeitspanne seit Strahlaustritt
D	Spritzlochdurchmesser
l	Spritzlochlänge
ρ_B	Kraftstoffdichte
η_B	Dynamische Viskosität des Kraftstoffes
σ_B	Spezifische Oberflächenspannung des Kraftstoffes
ρ_g	Gasdichte
η_g	Dynamische Viskosität des Gases

Die Dimensionsanalyse erfolgt zweckmäßig in einem $\{M, L, T\}$ -System. Einige der Einflussgrößen in der vorstehenden Liste lassen sich schon ohne Rechnung zu offensichtlichen dimensionslosen verbinden, d. h. die Gleichungen (3.-115) können umgeschrieben werden in

$$\begin{array}{l} d_m = f_1 \\ S = f_2 \\ \theta = f_3 \end{array} \left(\Delta V_B, \Delta t_E, \frac{\Delta t}{\Delta t_E}, D, \frac{l}{D}, \rho_B, \mu_B, \sigma_B, \frac{\rho_g}{\rho_B}, \frac{\eta_g}{\eta_B} \right). \quad (3.-116)$$

Für den mittleren Tropfendurchmesser und die verbliebenen dimensionsbehafteten Einflussgrößen ist die zugehörige Dimensionstafel ① im unteren Bild dargestellt.

①	M	L	T
d_m	0	1	0
ΔV_B	0	3	0
Δt_E	0	0	1
D	0	1	0
ρ_B	1	-3	0
η_B	1	-1	-1
σ_B	1	0	-2

②	M	L
d_m	0	1
ΔV_B	0	3
$\Delta t_E \eta_B$	1	-1
D	0	1
ρ_B	1	-3
σ_B / η_B^2	-1	2

③	M
d_m / D	0
$\Delta V_B / D^3$	0
$\Delta t_E \eta_B D$	1
$\rho_B D^3$	1
$\sigma_B / \eta_B^2 D^2$	-1

④
d_m / D
$\Delta V_B / D^3$
$\Delta t_E \sigma_B / \eta_B D$
$\rho_B D \sigma_B / \eta_B^2$

Bild 3.39: Dimensionstafel ① zu der Beziehung für den mittleren Tropfendurchmesser in Gleichung (3.-116) und Eliminierung der Spaltenvektoren

Hinsichtlich der Strahlreichweite und des Strahlwinkels ist analog zu verfahren mit dem Ergebnis, dass sich die Gleichungen (3.-116) auf die dimensionslosen Zusammenhänge

$$\left. \begin{aligned} \frac{d_m}{D} &= F_1 \\ \frac{S}{D} &= F_2 \left(\frac{\Delta V_B}{D^3}, \frac{\Delta t_E \sigma_B}{\eta_B D}, \frac{\rho_B D \sigma_B}{\eta_B^2}, \frac{\Delta t}{\Delta t_E}, \frac{l}{D}, \frac{\rho_g}{\rho_B}, \frac{\mu_g}{\mu_B} \right) \\ \theta &= F_3 \end{aligned} \right\} \quad (3.-117)$$

verdichten lassen. Diese Beziehungen lassen sich mit der Potenzproduktumwandlung

$$\frac{\Delta V_B}{D^3} \times \left(\frac{\Delta t_E \sigma_B}{\eta_B D} \right)^{-1} \times \frac{\rho_B D \sigma_B}{\eta_B^2} = \frac{\Delta V_B \rho_B}{\Delta t_E D \eta_B} \quad (3.-118)$$

umschreiben in

$$\left. \begin{aligned} \frac{d_m}{D} &= F_1 \\ \frac{S}{D} &= F_2 \left(\frac{\Delta V_B}{D^3}, \frac{\Delta V_B \rho_B}{\Delta t_E D \eta_B}, \frac{\rho_B D \sigma_B}{\eta_B^2}, \frac{\Delta t}{\Delta t_E}, \frac{l}{D}, \frac{\rho_g}{\rho_B}, \frac{\mu_g}{\mu_B} \right), \\ \theta &= F_3 \end{aligned} \right\} \quad (3.-119)$$

womit der Erwartung Rechnung getragen wurde, dass mit der Einspritzrate $\Delta V_B / \Delta t_E$ eine einflussgewichtige Dimensionslose zu bilden sein sollte. Für den mittleren Differenzdruck Δp , der sich während der Einspritzung über dem Spritzloch einstellt, gilt im Wesentlichen die Einflussgrößenliste

$$\Delta p = g(\Delta V_B, \Delta t_E, D, \rho_B, \eta_B). \quad (3.-120)$$

Mit Blick auf die dimensionslosen Gruppen in Gleichung (3.-119) lässt sich das Ergebnis einer Dimensionsanalyse auch ohne Rechnung angeben:

$$\frac{\Delta p \rho_B D^2}{\eta_B^2} = G \left(\frac{\Delta V_B}{D^3}, \frac{\Delta V_B \rho_B}{\Delta t_E D \eta_B} \right). \quad (3.-121)$$

Die Dimensionslosen in der Argumentklammer stehen auch in der Argumentliste der Gleichungen (3.-119), sodass man in den Letzteren die in der Klammer an zweiter Stelle stehende „dimensionslose Einspritzrate“ durch die in Gleichung (3.-121) auf der linken Seite stehende „dimensionslose Druckdifferenz“ austauschen kann:

$$\begin{aligned} \frac{d_m}{D} &= F'_1 \\ \frac{S}{D} &= F'_2 \left(\frac{\Delta V_B}{D^3}, \frac{\Delta p \rho_B D^2}{\eta_B^2}, \frac{\rho_B \sigma_B D}{\eta_B^2}, \frac{\Delta t}{\Delta t_E}, \frac{l}{D}, \frac{\rho_g}{\rho_B}, \frac{\eta_g}{\eta_B} \right) \\ \theta &= F'_3 \end{aligned} \quad (3.-122)$$

Diese Formulierung verknüpft die kennzeichnenden Strahlgrößen mit dem Einspritzdruck.

In der Literatur sind verschiedene experimentelle Untersuchungen zur Ermittlung des mittleren Tropfendurchmessers, der Strahleindringtiefe und des Strahlkegelwinkels in Abhängigkeit von bestimmenden Einflussgrößen bekannt geworden. Die als Ergebnis dieser Arbeiten aufgestellten Funktionsansätze sind allerdings oftmals aus dimensionstheoretischer Sicht mehr oder weniger unbefriedigend, d. h. die Gleichungsurheber haben (offenbar in Unkenntnis der dimensionstheoretischen Grundlagen) gar nicht erst den Versuch unternommen, die für ihr Problem relevanten dimensionslosen Gruppen zu ermitteln, um dann ihre Gleichungen aus denselben aufzubauen.

Im Folgenden wird der Versuch unternommen, beispielhaft einige Funktionsansätze aus der Literatur nachträglich so zu ergänzen, dass sie mit den Gleichungen (3.-122) vereinbar sind.

- Strahleindringtiefe

Nach /9/ gilt

$$S = 1,1 \left(\frac{\Delta p \rho_B D^2}{\eta_B^2} \right)^{0,3} \left(\frac{D \rho_B \sigma_B}{\eta_B^2} \right)^{-0,008} \left(\frac{\rho_B}{\rho_g} \right)^{0,5} \left(\frac{l}{D} \right)^{0,16} \Delta t^{0,55} \quad (3.-123)$$

Diese Gleichung verwendet zwar weitgehend, aber eben nicht ausschließlich dimensionslose Gruppen der physikalischen Einflussgrößen des Problems. Mit der Zahl 1,1 enthält sie zudem eine offenbar nicht erklärte dimensionsbehaftete Konstante, was darauf zurückzuführen sein dürfte, dass die Verbindung mit den Experimenten nicht in optimaler Weise gelungen ist. In diesem Fall kann aber wahrscheinlich recht einfach auf die Form

$$\frac{S}{D} \sim \left(\frac{\Delta p \rho_B D^2}{\eta_B^2} \right)^{0,3} \left(\frac{D \rho_B \sigma_B}{\eta_B^2} \right)^{-0,008} \left(\frac{\rho_B}{\rho_g} \right)^{0,5} \left(\frac{l}{D} \right)^{0,16} \left(\frac{\Delta t}{\Delta t_E} \right)^{0,55} \quad (3.-124)$$

korrigiert werden, die mit Gleichung (3.-122) in Einklang steht und in der die (nicht mehr mitgeschriebene nun leider unbekannt) multiplikative Konstante dimensionslos ist.

- Strahlkegelwinkel

In /10/ wird die Beziehung

$$\tan \frac{\theta}{2} \sim D^{0,508} \Delta p^{0,0094} \rho_g^{0,335}, \quad (3.-125)$$

angegeben, die offensichtlich ohne nähere Überlegung zu den relevanten Einflussgrößen und ohne jede Berücksichtigung von dimensionstheoretischen Aspekten entstanden ist. Der Gleichungsurheber hat wohl in seiner Versuchseinrichtung einfach die auf der rechten Seite stehenden Einflussgrößen in einer gewissen Bandbreite variiert und dabei den jeweils zugehörigen Strahlkegelwinkel notiert. Anschließend hat er mit Hilfe eines geeigneten Rechenprogrammes seine Versuchsdaten durch den obigen Gleichungsansatz approximiert. Die an eine physikalische Gleichung zu stellende Anforderung der Dimensionshomogenität lässt sich hier nur dadurch erfüllen, dass man in Gleichung (3.-125) eine multiplikative Dimensionskonstante C mit $[C] = L^{5,252} M^{-0,3444} T^{-0,0188}$ im $\{M, L, T\}$ -System einfügt, die allerdings zum Ausdruck bringt, dass etliche nicht erkannte Einflussgrößen in unkontrollierter Weise in die Gleichungsformulierung eingegangen sind. Damit kann es sich bei der Gleichung nicht um eine allgemeingültige physikalische Beziehung zwischen den genannten Einflussgrößen handeln.

Hinsichtlich der nach Gleichung (3.-125) sehr starken Abhängigkeit des Strahlkegelwinkels vom Düsenlochdurchmesser, die durch Resultate von anderen Forschungsstellen nicht bestätigt wird, führen die Gleichungsurheber aus, dass sie ihre Untersuchungen bei konstanter Düsenlochlänge durchgeführt haben und dass ihre Gleichung deshalb eigentlich den Einfluss des Verhältnisses l/D zum Ausdruck bringt. Hiernach und mit Blick auf Gleichung (3.-122) dürfte die Gleichung (3.-125) auf die Form

$$\tan \frac{\theta}{2} \sim \left(\frac{l}{D} \right)^{-0,508} \left(\frac{\Delta p \rho_B l^2}{\eta_B^2} \right)^{0,0094} \left(\frac{\rho_g}{\rho_B} \right)^{0,335} \quad (3.-126)$$

zu korrigieren sein. Die nun dimensionslose multiplikative Konstante bliebe allerdings noch zu ermitteln.

- Mittlerer Tropfendurchmesser

In /11/ wird für den mittleren Tropfendurchmesser (ermittelt nach der sogenannten Sauter-Methode) angegeben

$$d_m^{(S)} = A \Delta p^{-0,135} \rho_g^{0,121} \Delta V_B^{0,131}. \quad (3.-127)$$

Für diese Gleichung gilt die vorstehende Kritik in gleichem Maße ⁷.

Wahrscheinlich hat der Gleichungsurheber seine Untersuchungen ohne Variation der Düsenlochgeometrie durchgeführt. Nach Sichtung der in der Literatur weiterhin verfügbaren Aussagen zu Einflüssen auf den Sauter-Durchmesser erscheint die korrigierte Beziehung

⁷ Leider sind derart unbefriedigende Gleichungsformulierungen des Öfteren in der ingenieurwissenschaftlichen Literatur zu finden.

$$\frac{d_m^{(S)}}{D} \sim \left(\frac{\eta_B^2}{\Delta p \rho_B D^2} \right)^{0,135} \left(\frac{\rho_g}{\rho_B} \right)^{0,121} \left(\frac{\Delta V_B}{D^3} \right)^{0,131} \quad (3.-128)$$

angebracht, die auch den Einfluss des Düsenlochmessers in annähernder Übereinstimmung mit den Ergebnissen von anderen Forschungsstellen zum Ausdruck bringt.

LITERATUR

- /1/ Görtler H.
Dimensionsanalyse. Berlin / Heidelberg / New York: Springer Verlag, 1975
- /2/ Pawlowski J.
Die Ähnlichkeitstheorie in der physikalisch-technischen Forschung.
Berlin / Heidelberg / New York: Springer Verlag, 1971
- /3/ Taylor E. S.
Dimensional Analysis for Engineers. Oxford: Clarendon Press, 1974
- /4/ Sonin Ain A.
The Physical Basis of Dimensional Analysis. Second Edition. Department of Mechanical Engineering MIT Cambridge, MA 02139, 2001
http://web.mit.edu/2.25/www/pdf/DA_unified.pdf
- /5/ Strehlow, R. A.
Fundamentals of Combustion. Huntington, New York: Robert E. Kreiger Publishing Company, 1979
- /6/ Abschlussbericht SFB 224 Motorische Verbrennung, Kap. 3.
<http://www.sfb224.rwth-aachen.de/bericht.htm>
- /7/ Abschlussbericht SFB 224 Motorische Verbrennung, Kap. 2.
<http://www.sfb224.rwth-aachen.de/bericht.htm>
- /8/ Barnard, J. A., Bradley, J. N.
Flame and Combustion, 2nd edition. London/ New York: Chapman and Hall, 1985
- /9/ Varde Keshav S., Popa Daniel M.
Diesel fuel spray penetration at high injection pressures.
SAE-paper 830448, 1983
- /10/ Arregle J., Pastor J.V., Ruiz S.
The Influence of Injection Parameters on Diesel Spray Characteristics.
SAE paper 1999-01-0200, 1999
- /11/ Hiroyasu H., Kadota T.
Fuel Droplet Size Distribution in Diesel Combustion.
SAE paper 740715, 1974