

DK 666.1.031.2:666.1.031.154:666.1.031.13:532.5

Beitrag zur Berechnung der Homogenisierungsvorgänge in Glasschmelzwannen *)

Von Franz Ferdinand Rhiel, Dormagen

(Vortrag auf dem HVG-Kolloquium „Glasströmungen in Wannenöfen“ am 30. Oktober 1975 in Frankfurt (Main))

(Mitteilung aus dem Institut für Industrieofenbau und Wärmetechnik im Hüttenwesen der Rhein.-Westf. Techn. Hochschule Aachen)

(Eingegangen am 14. Juni 1976)

Die Vorgänge der Homogenisierung von Schlieren in Schmelzwannen werden durch ein mathematisches Modell beschrieben, dem die substantielle Betrachtungsweise zugrunde liegt. Dabei wird von den Ergebnissen eines auf der lokalen Betrachtungsweise beruhenden mathematischen Modells ausgegangen, das die Berechnung des Temperatur- und Strömungsfeldes in der Symmetrieebene der Wanne ermöglicht.

Es werden Gleichungen hergeleitet, die die Schlieren-

verformung durch die Strömung und die Schlierenauflösung durch Deformation und Diffusion beschreiben. Die Homogenisierungsbedingungen auf den von der Gemengedecke bis zum Durchlaß führenden Strömungsbahnen werden durch eine Kennzahl wiedergegeben, die bei Variation der Wannenparameter die Haupteinflussfaktoren des Homogenisierungsprozesses erkennen läßt und damit Hinweise für eine optimale Wannenführung gibt.

Contribution to calculation of the homogenizing process in glass tanks

The process of homogenizing cord in tank furnaces can be described by a mathematical model taking into account conditions from point to point. This can be done by a mathematical model which uses the calculated temperature and flow fields in the plane of symmetry of the tank.

Equations are put forward which allow description of both the deformation of the cord and its removal by diffusion

in addition to deformation. The homogenizing conditions along different flow paths from the batch cover to the throat can be described by a characteristic number which takes into account the main factors influencing homogenization and the tank parameters. This then provides assistance in achieving optimum tank operating conditions.

Contribution au calcul des processus d'homogénéisation dans les bassins de verrerie

Les processus d'homogénéisation des inclusions vitreuses dans les bassins de fusion sont décrits à l'aide d'un modèle mathématique basé sur un examen global. On part des résultats d'un modèle mathématique basé sur un examen localisé, qui permet de calculer les champs de température et de courants dans le plan de symétrie du bassin.

On en déduit des équations décrivant la déformation des inclusions par le courant et leur dissolution par déformation

et diffusion. Les conditions d'homogénéisation le long des lignes de courants qui conduisent du tapis de composition à la gorge sont rendues par un nombre caractéristique qui permet de repérer les facteurs du processus d'homogénéisation dont l'influence est primordiale lors de la variation des paramètres du four et qui fournit donc des indications en vue d'optimiser la conduite du four.

1. Einleitung

Neben dem Erschmelzen des Glases aus den Rohstoffen zählen die Homogenisierung und die Läuterung zu den Hauptaufgaben der Glasschmelzwanne. Unter Homogenisierung versteht man den Abbau von Schlieren in der Schmelze. Schlieren sind Gebiete inhomogener Materialzusammensetzung, die nach dem Erkalten Eigenspannungen im Glas verursachen und bei Flachgläsern zu störenden Oberflächenverwerfungen führen. Mit dem Begriff Läuterung bezeichnet man die Entgasung der Schmelze. Die Homogenisierungs- und Läutervorgänge in der Schmelzwanne sind für die erzielbare Glasqualität von entscheidender Bedeutung, denn Schlieren und Blasen schränken die Gebrauchsfähigkeit des Glases erheblich ein.

Da sowohl die Homogenisierung als auch die Läuterung vom Temperatur- und Strömungsfeld in der Schmelzwanne abhängen, ist die Kenntnis dieser Felder zur Beurteilung der Leistungsfähigkeit der Wanne außerordentlich wichtig. Es ist deshalb versucht worden, diese Felder entweder durch Messungen an bestehenden Wannen, durch Modelluntersuchungen oder durch Berechnungen zu ermitteln. Hierbei hat sich die Berechnung als eine sehr brauchbare Methode erwiesen. Allerdings können aus rechentechnischen Gründen gegenwärtig nur zweidimensionale Felder numerisch behandelt werden.

Alle bisher entwickelten mathematischen Modelle zur Berechnung des Temperatur- und Strömungsfeldes basieren auf der von Euler begründeten lokalen Betrachtungsweise [1]. Diese Modelle berechnen die Temperatur und die strömungsmechanischen Größen als Funktion des Ortes und, sofern das Verfahren instationär ist, als Funktion der Zeit. Die Ergebnisse dieser Modelle gestatten jedoch noch keine direkten Aussagen über die Homogenisierungs- und Läutervorgänge in der Wanne. Angaben hierüber sind nur möglich, wenn Einzelheiten über den zeitlichen Bewegungsablauf und Temperaturverlauf der Fluidelemente bekannt sind.

Im folgenden wird nur auf den Homogenisierungsprozeß eingegangen. Die Läutervorgänge werden in einem späteren Bericht [2] behandelt.

1.1. Schlierendeformation und Homogenisierung

Die große Zähigkeit des Glases und die geringen Strömungsgeschwindigkeiten ergeben sehr kleine Reynolds-Zahlen. Demnach lassen sich die im Glasbad auftretenden Strömungen mit Hilfe der Gesetze der „schleichenden Strömung“ beschreiben. In der Glas-

*) Auszug aus der unter dem Titel „Beitrag zur Berechnung der Homogenisierungs- und Läutervorgänge in Glasschmelzwannen“ von der Fakultät für Bergbau und Hüttenwesen der Rhein.-Westf. Techn. Hochschule Aachen genehmigten Dissertation des Autors 1976.

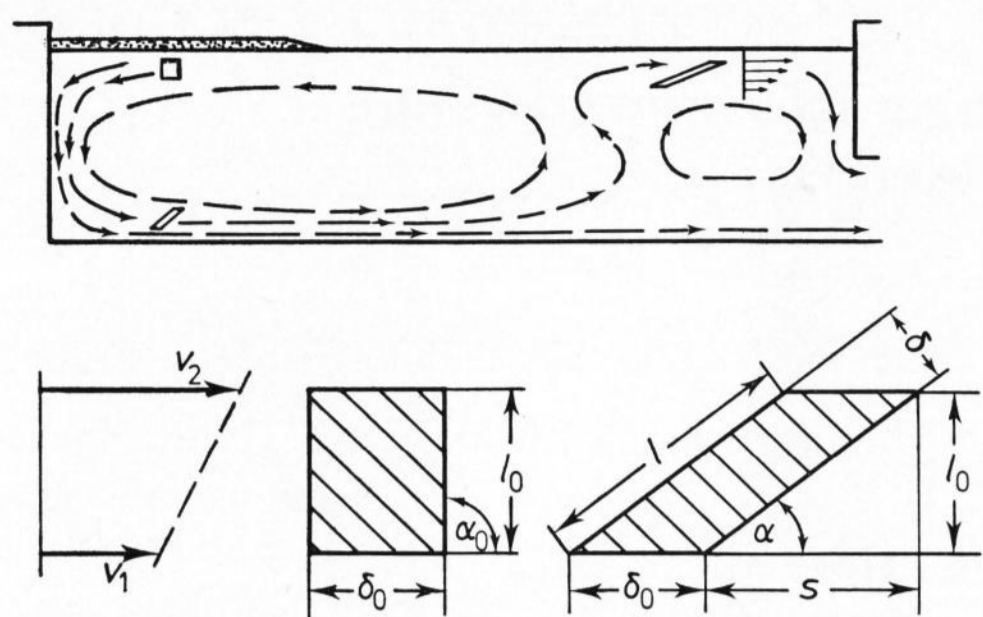


Bild 1. Schlierendeformation durch Scherströmung.

schmelze findet keine Turbulenz und daher keine konvektive Durchmischung statt. Der einzige Vorgang, der zu einem Konzentrationsausgleich und damit zu einer Auflösung der Schlieren führt, ist die Diffusion. Sie wird unterstützt durch die Strömung.

Nach Geffcken [3] läßt sich die Homogenisierung auf zwei Grundvorgänge zurückführen: 1. das Ausziehen der Schlieren und 2. den Ausgleich durch Diffusion. Durch Scherung werden die Schlieren in Strömungsrichtung ausgezogen, wie dies in Bild 1 für ein würfelförmiges Schlierelement dargestellt ist. Die Schlierendicke δ nimmt ab, und das Konzentrationsgefälle in Richtung der Schlierenverjüngung wird größer (siehe Abschnitt 3.2.3.). Hierdurch wird der Diffusionsprozeß progressiv beschleunigt und die Zeit, die für einen Konzentrationsausgleich erforderlich ist, stark herabgesetzt. Geffcken [3] führt hierzu ein eindrucksvolles Beispiel an: Weist die Strömung eine Scherung von $b = 1 \text{ s}^{-1}$ auf, so wird die Schliere in der Schmelze in 16 min bereits ebensoweit abgebaut, wie dies im unverformten Zustand erst nach 10 Jahren der Fall wäre.

Neben der Scherung kann auch eine Änderung des Strömungsquerschnitts zu einer Erhöhung des Konzentrationsgefälles führen. Eine anschauliche Darstellung, wie die Scherung und der Strömungsquerschnitt die Schlierengeometrie beeinflussen, ist bei Cooper [4 und 5] enthalten.

Es ist Aufgabe der Strömung, die in der Schmelze vorhandenen Schlieren so zu deformieren und damit die für einen Konzentrationsausgleich erforderliche Diffusionszeit soweit herabzusetzen, daß sie in der Größenordnung der Verweilzeit liegt.

1.2. Strömungs- und Temperaturfelder

Zur Berechnung der Strömungen im Glasbad sind verschiedene mathematische Modelle entwickelt worden, deren Aufbau und Anwendungsbereiche bei Leyens [6] beschrieben sind. In der vorliegenden Arbeit wird von den Ergebnissen des mathematischen Modells von Leyens [6] ausgegangen. In diesem Modell, das sich auf den Längsschnitt (Symmetrieebene) der Schmelzwanne bezieht, werden der Energie- und der Stofftransport der Strömung durch zwei gekoppelte partielle Differentialgleichungen beschrieben. Neben der Auftriebsströmung, die zu zwei sich gegensinnig drehenden Strömungswalzen führt, wird auch die Entnahmestromung (Durchsatzströmung) berücksichtigt.

Die numerische Lösung der gekoppelten Differentialgleichungen erfolgt durch ein instationäres Differenzenverfahren, mit dem das Temperatur- und Strömungsfeld

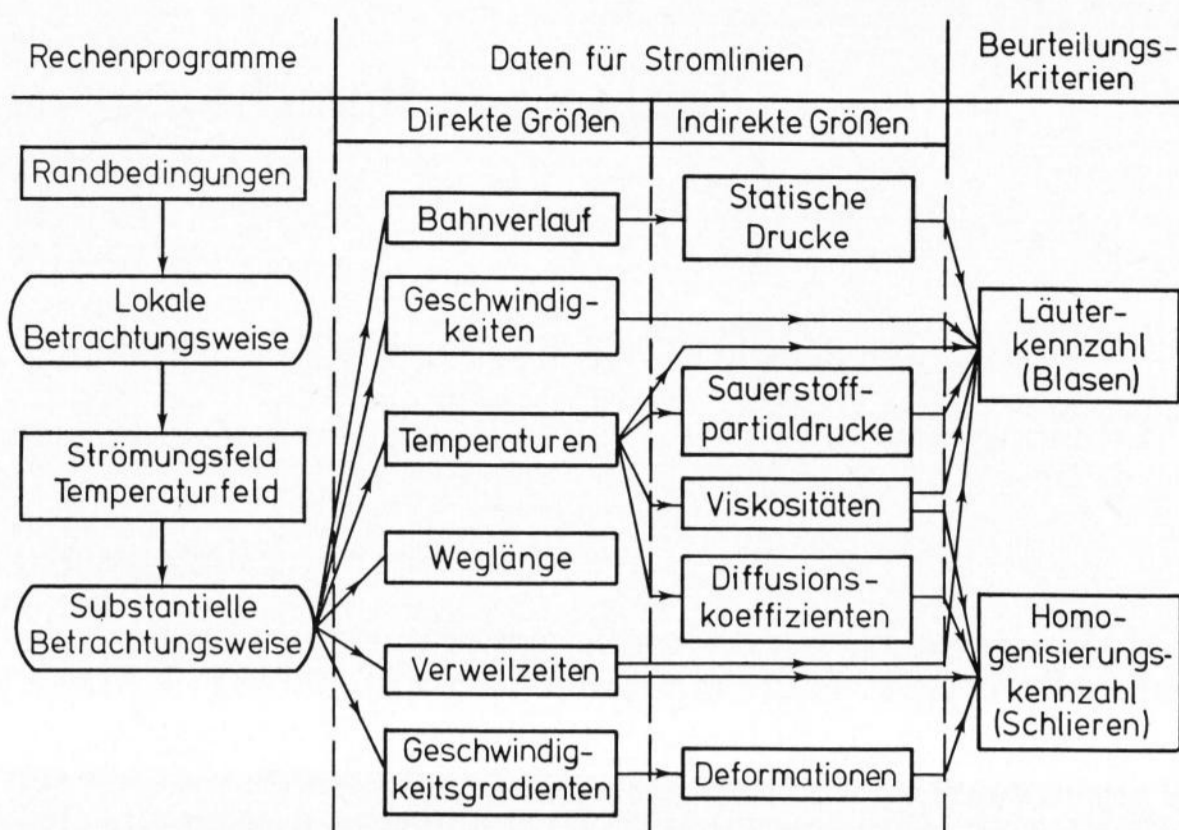


Bild 2. Mathematische Modelle zur Beurteilung von Glas-schmelzwannen.

des stationären Zustandes iterativ berechnet wird. Grundlage der Berechnungsmethode ist das durch Teilgebietslösung verbesserte Differenzenverfahren von Woelk [7]. Bei dem Verfahren wird das betrachtete Gebiet, in diesem Fall die Symmetrieebene, mit einem rechteckigen Gitternetz überspannt. An den Knotenpunkten des Netzes werden die Temperatur und die Stromfunktionswerte bestimmt. Von diesen Daten geht die vorliegende Arbeit aus.

2. Ziel der Arbeit

Aussagen über die Homogenisierungsvorgänge in der Wanne sind nur möglich, wenn Einzelheiten über den zeitlichen Bewegungsablauf und Temperaturverlauf der von der Strömung mitgeführten Partikel bekannt sind. Zur Erfassung dieser Vorgänge ist deshalb ein mathematisches Modell unter Zugrundelegung der substantiellen Betrachtungsweise [1] zu entwickeln.

Für die Partikel, die im Gemenge abschmelzen und auf einer Strömungsbahn (Stromlinie) die Wanne bis zum Durchlaß durchlaufen, sind die wesentlichen Daten hinsichtlich der Homogenisierung zu ermitteln und zu einem Integralwert zusammenzufassen. Aus diesem Wert soll eine Kennzahl bestimmt werden, die die unterschiedlichen Homogenisierungsbedingungen auf den verschiedenen Stromlinien wiedergibt und zur Beurteilung der Betriebsverhältnisse der Schmelzwanne herangezogen werden kann. Die Kennzahl soll weiterhin dazu dienen, Tendenzen hinsichtlich der Schmelzleistung bei Variation der Randbedingungen aufzuzeigen. Auf diese Weise lassen sich aus den Wannenparametern die Faktoren erkennen, die die Glasqualität maßgeblich beeinflussen. Dadurch können Hinweise für eine Verbesserung der Konstruktion und Betriebsweise der Schmelzwanne gewonnen werden.

In Bild 2 sind bereits die entsprechenden Größen für die Läuterung eingetragen, auf die in einem späteren Bericht [2] eingegangen wird.

Für die zu erwartenden Ergebnisse gelten die gleichen Einschränkungen, die der Berechnung des Temperatur- und Strömungsfeldes zugrunde liegen. Es werden keine Einbauten zur Umlenkung der Strömung, kein Bubbling und keine elektrische Zusatzbeheizung berücksichtigt. Obwohl nur die Vorgänge in der Symmetrieebene erfaßt werden, lassen sich aus den

Ergebnissen die kritischen Bedingungen der Wanne erkennen, denn in dieser Ebene ist die kürzeste Aufenthaltsdauer zu erwarten. Dort können deshalb am ehesten Teilchen im schlecht homogenisierten Zustand in den Durchlaß gelangen.

Zwischen der Schmelze in der Durchsatzströmung und der Schmelze in den Strömungswalzen findet ein Massenaustausch durch Diffusion statt. Dieser Austausch, der im Vergleich zum Massentransport durch die Strömung sehr gering ist, wird in dem mathematischen Modell von Leyens [6] und in der vorliegenden Arbeit nicht berücksichtigt.

3. Theoretische Grundlagen des mathematischen Modells¹⁾

3.1. Interpolation der Stromfunktionswerte und der Temperaturen

Wie dem Abschnitt 1.2. zu entnehmen ist, geht das vorliegende Modell von den Stromfunktionswerten und Temperaturen aus, die mit dem Modell von Leyens an den Knotenpunkten des Gitternetzes berechnet werden. Da zur Bestimmung des Bahn- und Temperaturverlaufs der von der Strömung mitgeführten Partikel die Stromfunktionswerte und Temperaturen an jedem Ort des betrachteten Gebiets bekannt sein müssen, sind die genannten Ausgangswerte zu interpolieren. Als Interpolationsfunktionen sind dabei nur solche Funktionen in Betracht zu ziehen, die der physikalischen Bedeutung der Stromfunktion und Temperatur gerecht werden.

Die Geschwindigkeiten und die örtlichen Geschwindigkeitsänderungen, die zu Schlierendeformationen führen und damit den Homogenisierungsprozeß wesentlich beeinflussen, ergeben sich aus den ersten und zweiten Ableitungen der Stromfunktion nach dem Ort. Hieraus läßt sich bereits erkennen, daß die Genauigkeit der Rechenergebnisse maßgeblich davon abhängt, durch welche Funktion die Stromfunktionswerte interpoliert werden. Die an eine Interpolationsfunktion zu stellenden Forderungen, die sich aus dem physikalischen Sachverhalt ergeben, den die Stromfunktion beschreibt, sind von Rhiel [8] hergeleitet und im einzelnen näher begründet worden. Es ist weiterhin gezeigt worden [8], daß die zweidimensionale kubische Spline-Funktion [9 bis 11] diese Forderungen erfüllt und daher als Interpolationsfunktion benutzt werden kann.

Im Gegensatz zur Stromfunktion werden die Ableitungen der Temperatur zur Berechnung der Homogenisierung nicht benötigt. Die Temperatur kann deshalb innerhalb der Rechtecke des Gitternetzes linear interpoliert werden.

3.2. Schlierendeformation und Homogenisierung

3.2.1. Strömungsmechanische Größen

Bei der in Schmelzwannen herrschenden stationären Strömung ist die Deformation der Fluidelemente auf örtliche Geschwindigkeitsänderungen zurückzuführen. Die Art der Verformung hängt davon ab, in welche Richtung sich die Fluidelemente bewegen und wie sich die Geschwindigkeit von Ort zu Ort ändert. Als Ver-

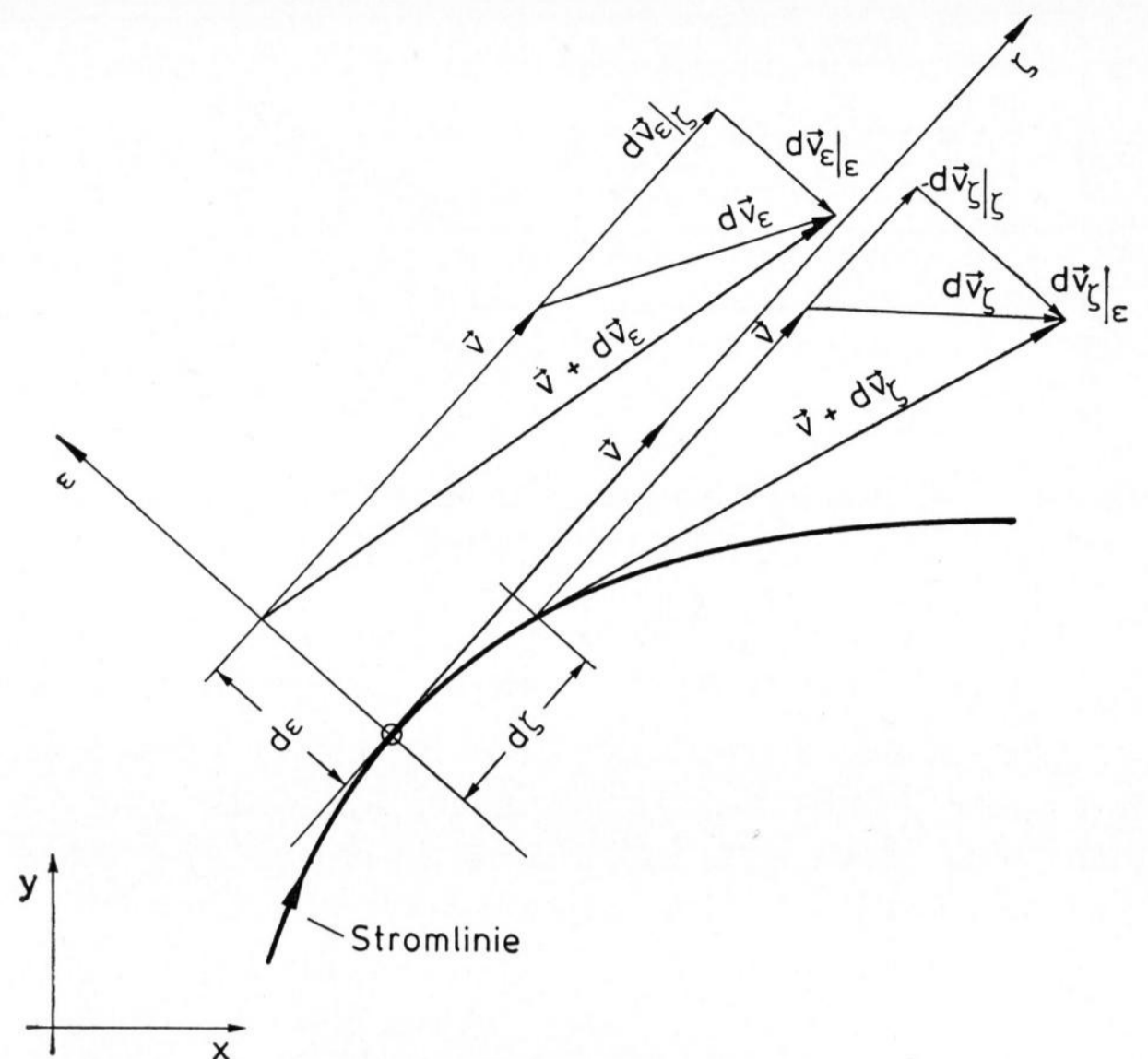


Bild 3. Geschwindigkeitsänderungen im Strömungsfeld.

formungsarten unterscheidet man die Scherung bei Scherströmung und die Dehnung oder Stauchung bei Änderung des Strömungsquerschnitts. Zur Unterscheidung gegenüber den Formeln der lokalen Betrachtungsweise werden im vorliegenden Fall der substantiellen Betrachtungsweise die Scherung mit *b* und die Änderung des Strömungsquerschnitts mit *a* bezeichnet.

Sowohl in Richtung der Bahntangente (ζ) als auch senkrecht dazu (ϵ) kann sich die Geschwindigkeit dem Betrage und der Richtung nach ändern (Bild 3). Zur Bestimmung der Scherung und der Änderung des Strömungsquerschnitts werden die Geschwindigkeitsdifferenzen $d\vec{v}_\zeta$ und $d\vec{v}_\epsilon$ in ζ - und ϵ -Komponenten zerlegt.

3.2.1.1. Scherung

Wie dem Bild 3 zu entnehmen ist, gibt die auf $d\zeta$ bezogene ϵ -Komponente $d\vec{v}_\zeta|_\epsilon$ der Geschwindigkeitsdifferenz $d\vec{v}_\zeta$ die momentane Winkelgeschwindigkeit ω wieder. Bei der Herleitung der Formel für die Scherung ist also zu berücksichtigen, daß der Teil der Geschwindigkeitsänderung senkrecht zur Bahnrichtung, der sich auf Grund der Bahnkrümmung ergibt, keinen Beitrag zur Scherung leistet. Für die Scherung *b* ergibt sich demnach:

$$b = \frac{d\vec{v}}{d\epsilon} \Big|_\zeta + \frac{d\vec{v}}{d\zeta} \Big|_\epsilon \tag{1}$$

Winkelgeschwindigkeit ω

In Gleichung (1) entspricht ein positiver Wert der Winkelgeschwindigkeit ω einer Drehrichtung im Gegenuhreigersinn.

Bei der Bestimmung der Scherung mit Hilfe von Gleichung (1) wird angenommen, daß die Schliere und das Grundglas, das die Schliere umgibt, gleich große Viskositäten aufweisen. In Wirklichkeit führen jedoch unterschiedliche Konzentrationen zu verschiedenen großen Viskositäten. Aus der Gleichheit der Schubspannungen für Schlieren- und Grundglas ergibt sich die folgende Beziehung:

$$b_s = \frac{\eta_G}{\eta_s} \cdot b_G \tag{2}$$

¹⁾ Der vorliegende Bericht enthält nur einen Teil der Gleichungen und Formeln, die den Homogenisierungsprozeß beschreiben. Weitere Gleichungen und Formeln sowie deren Herleitung sind bei Rhiel [8] aufgeführt.

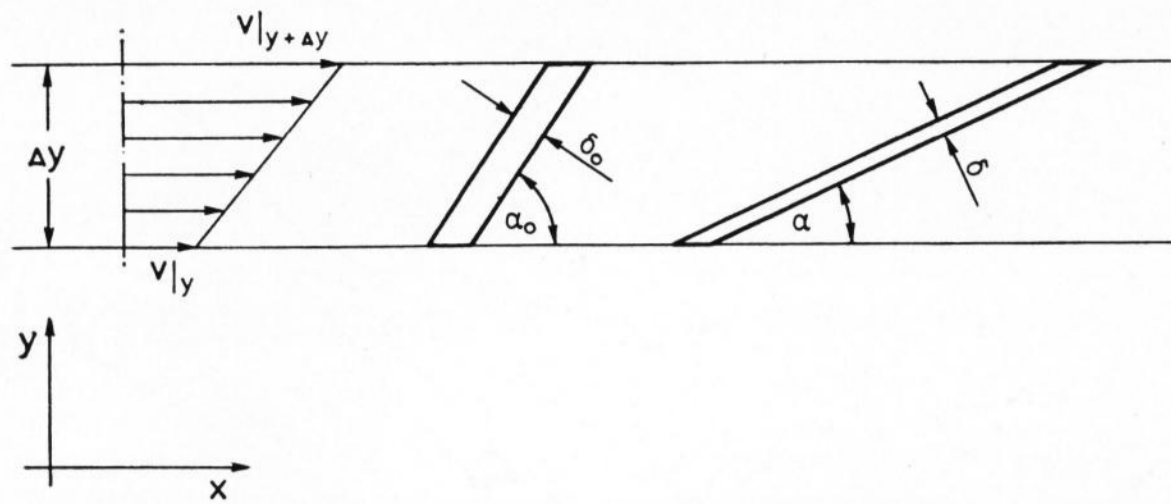


Bild 4. Schlierendeformation bei Scherströmung und geradliniger Bewegung.

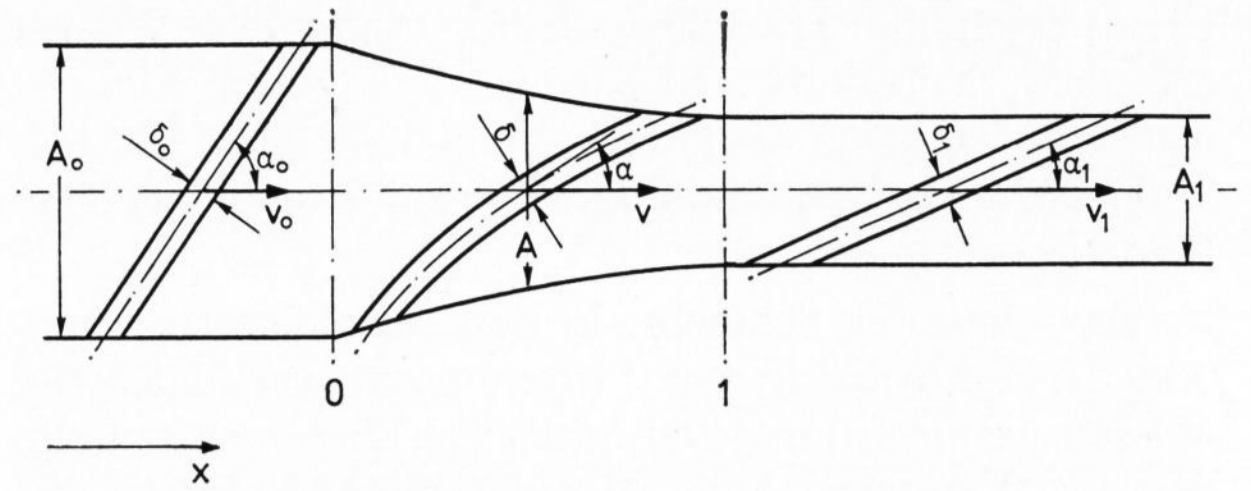


Bild 5. Schlierendeformation bei Verengung des Strömungsquerschnitts.

In der Gleichung (2) beziehen sich der Index S auf das Schlieren- und der Index G auf das Grundglas.

Die Koeffizienten der Vogel-Fulcher-Tammann-Gleichung [12] zur Berechnung der Viskosität η lassen sich nach einer von Lakatos u. a. [13] angegebenen Vorschrift aus der Glaszusammensetzung bestimmen.

Brückner [14] hat gezeigt, daß sich die Viskositäten von Tonerdeschlieren und Grundglas bei hohen Temperaturen nur sehr geringfügig unterscheiden, sofern in der Schliere die Tonerde an die Stelle des Siliciumdioxids tritt. In diesem Falle braucht der Viskositätsunterschied zwischen Schlieren- und Grundglas nicht berücksichtigt zu werden.

3.2.1.2. Änderung des Strömungsquerschnitts

Eine positive ζ -Komponente der Geschwindigkeitsdifferenz $d\vec{v}_\zeta$ zeigt an, daß in ζ -Richtung mehr Masse abfließt, als zugeführt wird. Die Differenz des Massenstroms in ζ -Richtung entspricht aus Kontinuitätsgründen der Differenz zwischen zu- und abfließender Masse in ε -Richtung. Die Differenz des Massenstroms in ε -Richtung wird durch die ε -Komponente der Geschwindigkeitsdifferenz $d\vec{v}_\varepsilon$ erfaßt. Für die Verengung des Strömungsquerschnitts a ergibt sich somit:

$$a = \left. \frac{d\vec{v}}{d\zeta} \right|_\zeta = - \left. \frac{d\vec{v}}{d\varepsilon} \right|_\varepsilon \quad (3)$$

3.2.2. Schlierenverformung bei Scherströmung und gleichzeitig sich änderndem Strömungsquerschnitt

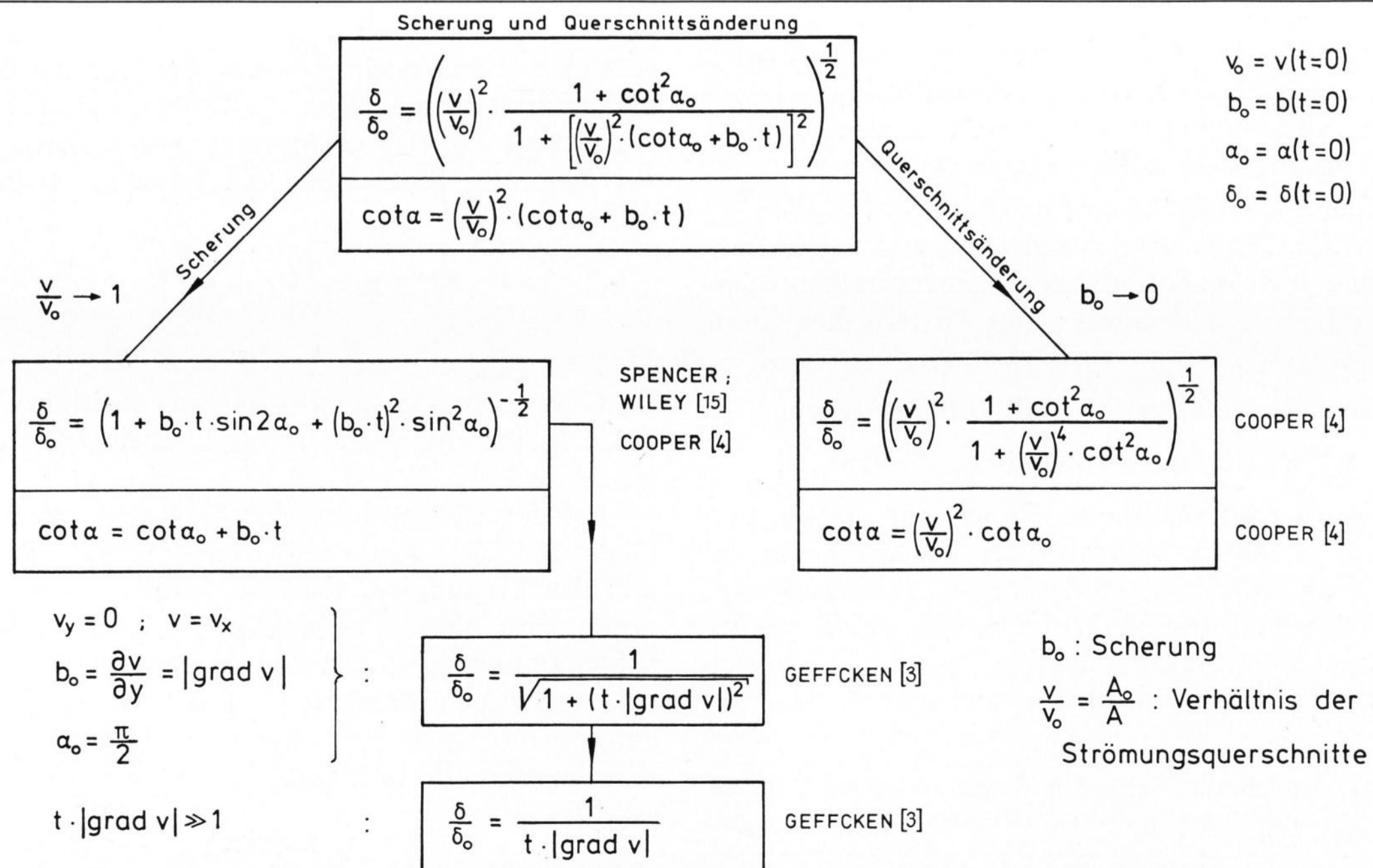
Die Bilder 4 und 5 zeigen, wie Schlieren bei Scherströmung und bei Verengung des Strömungsquerschnitts deformiert werden. In beiden Fällen ändern sich sowohl die Schlierendicke δ als auch der Orientierungswinkel α zwischen Schliere und Strömung. Die genannten Arten der Schlierendeformation lassen sich durch jeweils zwei Differentialgleichungen beschreiben. Aus diesen Gleichungen, die die Einflüsse der Scherströmung und Querschnittsänderung einzeln erfassen, sind die folgenden Gleichungen, mit denen die gesamte Schlierenverformung wiedergegeben wird, hergeleitet worden.

$$\frac{d\alpha}{dt} = \underbrace{-\frac{1}{2} \cdot b \cdot (1 - \cos 2\alpha)}_{\text{Scherung}} - \underbrace{a \cdot \sin 2\alpha}_{\text{Querschnittsänderung}} \quad (4)$$

$$\frac{1}{\delta} \cdot \frac{d\delta}{dt} = \underbrace{-\frac{1}{2} \cdot b \cdot \sin 2\alpha}_{\text{Scherung}} - \underbrace{a \cdot \cos 2\alpha}_{\text{Querschnittsänderung}} \quad (5)$$

Die Scherung b in den Gleichungen (4) und (5) hängt vom Strömungsquerschnitt und damit von der Zeit ab, da im vorliegenden Fall die substantielle Betrachtungs-

Tabelle 1. Formeln zur Berechnung der Schlierendeformation



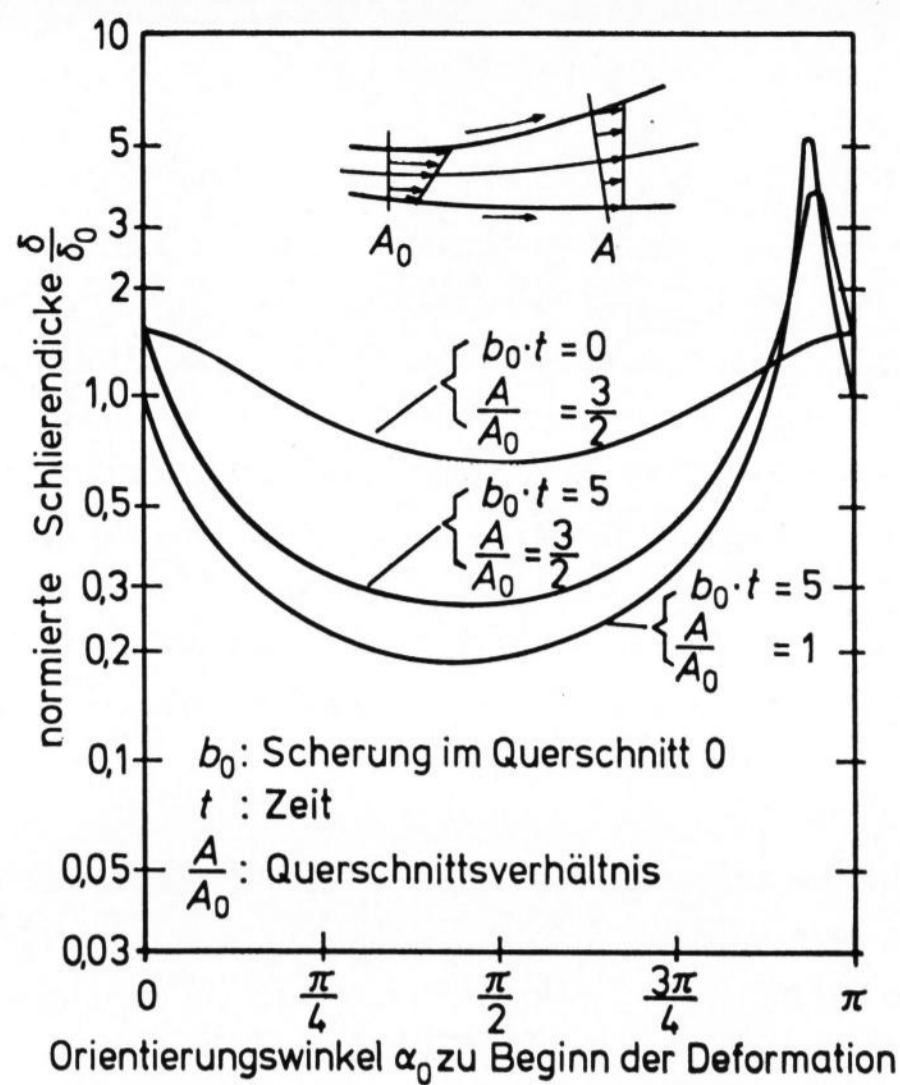


Bild 6. Schlierendeformation bei Scherströmung und gleichzeitiger Verengung des Strömungsquerschnitts.

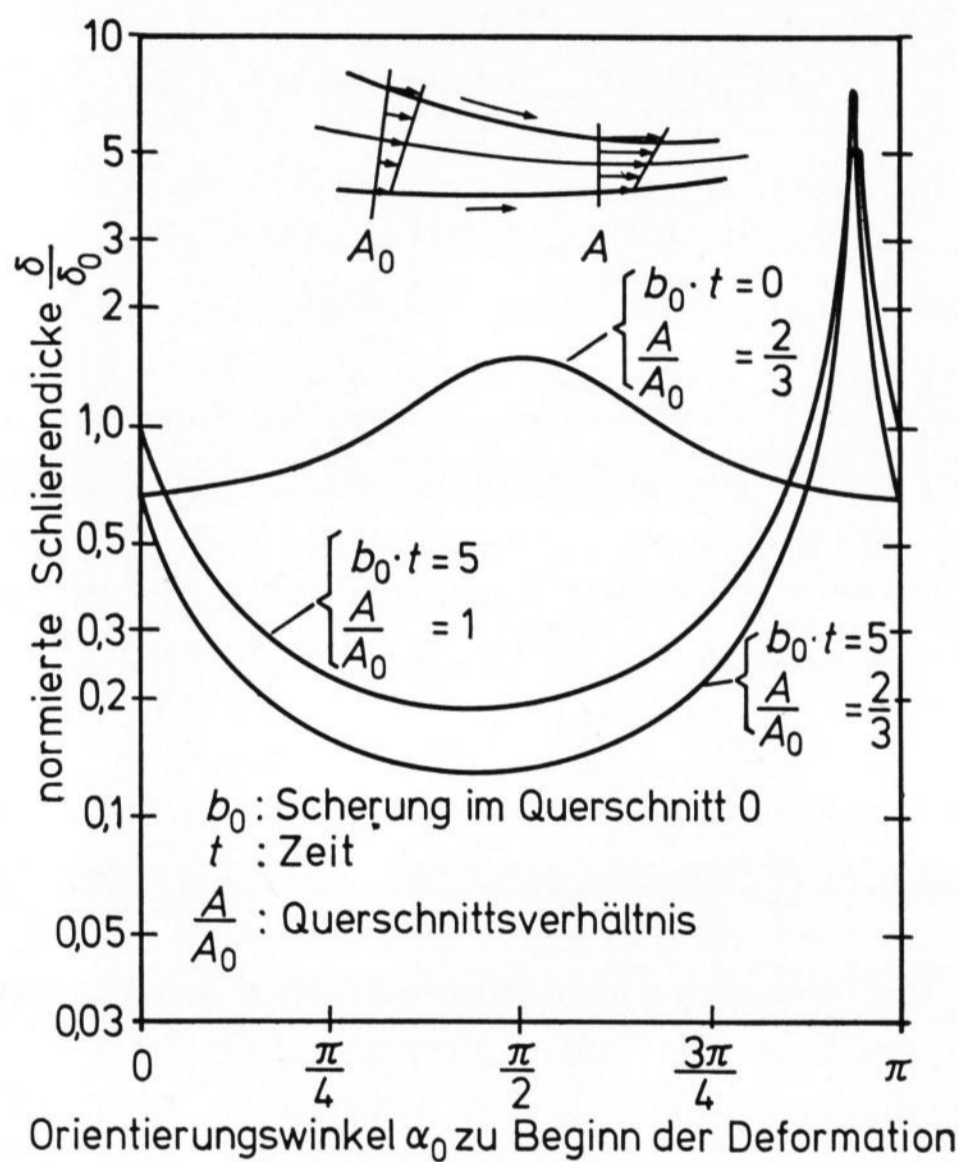


Bild 7. Schlierendeformation bei Scherströmung und gleichzeitiger Erweiterung des Strömungsquerschnitts.

weise vorausgesetzt wird. Aus dem Kontinuitätsgesetz folgt:

$$b = \left(\frac{v}{v_0}\right)^2 \cdot b_0. \tag{6}$$

Die Lösungen der Gleichungen (4) und (5) lauten:

$$\cot \alpha = \left(\frac{v}{v_0}\right)^2 \cdot (\cot \alpha_0 + b_0 \cdot t), \tag{7}$$

$$\frac{\delta}{\delta_0} = \left(\left(\frac{v}{v_0}\right)^2 \cdot \frac{1 + \cot^2 \alpha_0}{1 + \left[\left(\frac{v}{v_0}\right)^2 \cdot (\cot \alpha_0 + b_0 \cdot t)\right]^2} \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{8}$$

Den Lösungen (7) und (8) liegen die folgenden Anfangsbedingungen zugrunde:

$$v_0 = v(t=0) \tag{9}; \quad b_0 = b(t=0) \tag{10};$$

$$\alpha_0 = \alpha(t=0) \tag{11}; \quad \delta_0 = \delta(t=0) \tag{12}.$$

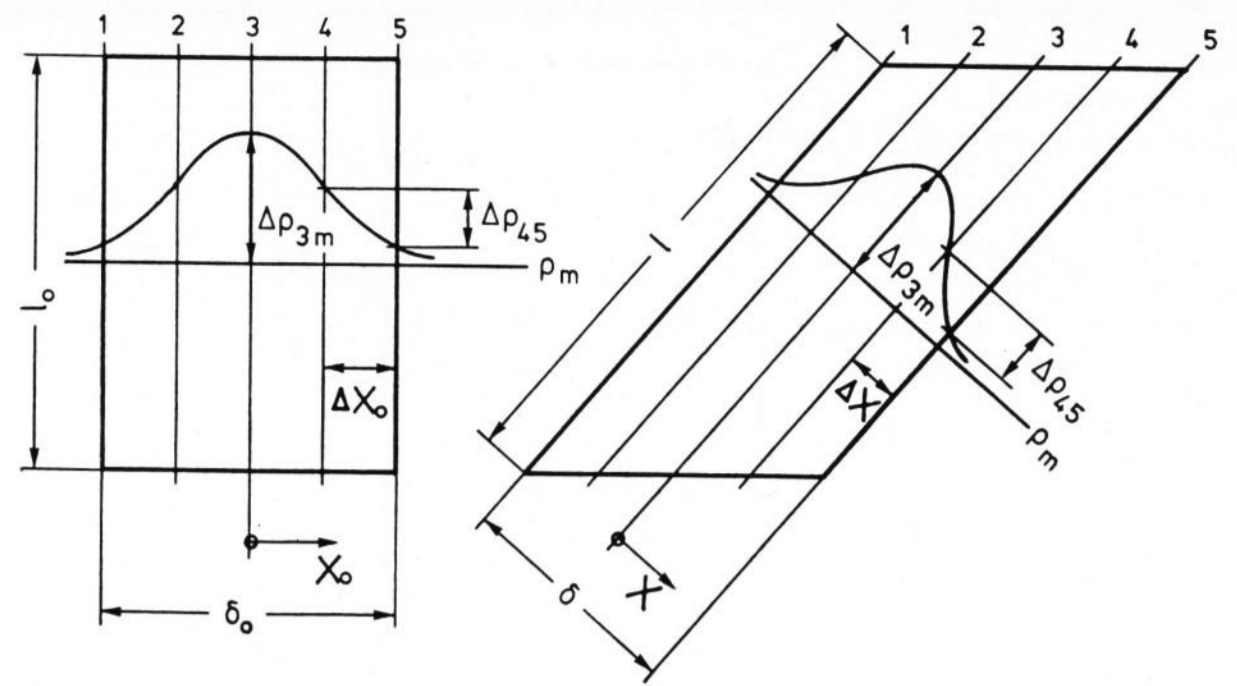


Bild 8. Einfluß der Schlierendeformation auf den Konzentrationsverlauf.

In Tabelle 1 wird gezeigt, daß die Formeln, die von Spencer und Wiley [15] sowie von Geffcken [3] und Cooper [4] angegeben werden, Sonderfälle der allgemeinen Deformationsgleichungen (7) und (8) sind.

Der Zusammenhang, den die Formel (8) beschreibt, wird in den Bildern 6 und 7 wiedergegeben. Aus den Diagrammen geht hervor, daß eine Querschnittsverengung zu einer Verstärkung und eine Querschnittserweiterung zu einer Abschwächung der Scherwirkung führen. Weiterhin ist zu erkennen, daß sich die Schlierenverformung bei Scherströmung und gleichzeitig sich änderndem Strömungsquerschnitt nicht aus der Summe der Einzeleffekte ergibt. Steht zum Beispiel die Schliere zu Beginn der Verformung senkrecht zur Strömungsrichtung, so führt eine Querschnittsverengung zu einer Zunahme der Schlierendicke. Liegt jedoch dabei Scherströmung vor, so wird die Schliere in Strömungsrichtung ausgezogen, so daß die Verengung des Strömungsquerschnitts dann eine Schlierenverjüngung bewirkt.

Bei der Berechnung der Schlierendeformation in der Schmelzwanne werden die Formeln (7) und (8) für kleine Streckenabschnitte angewendet. Der Orientierungswinkel α und die Schlierendicke δ werden von Ort zu Ort fortgeschrieben.

3.2.3. Konzentrationsausgleich durch Diffusion

Die Diffusion der am langsamsten diffundierenden Glaskomponente ist für den Homogenisierungsprozeß geschwindigkeitsbestimmend und weist daher bereits auf die kritischen Bedingungen hin. Im folgenden wird deshalb von der Tonerde (Al_2O_3), der Komponente mit dem kleinsten Diffusionskoeffizienten, ausgegangen.

Aus Bild 8 geht hervor, daß die Schlierendeformation zu einem Anwachsen des Konzentrationsgefälles in der Richtung führt, in der sich die Schliere verjüngt. Da die Schliere in der Schmelze stark deformiert wird, findet der Konzentrationsausgleich im wesentlichen nur in dieser Richtung statt. Bei der Berechnung der Homogenisierung genügt es deshalb, nur die Diffusion in Richtung der Schlierenabnahme (X-Richtung), also senkrecht zu den Linien 1 bis 5, zu berücksichtigen.

Für die von der Strömung mitgeführte Schliere wird der Konzentrationsausgleich in X-Richtung durch das zweite Ficksche Gesetz beschrieben:

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial X} \left(D \cdot \frac{\partial \varrho}{\partial X} \right). \tag{13}$$

Sofern der Diffusionskoeffizient D konzentrationsabhängig ist, läßt sich eine Lösung der Gleichung (13) in

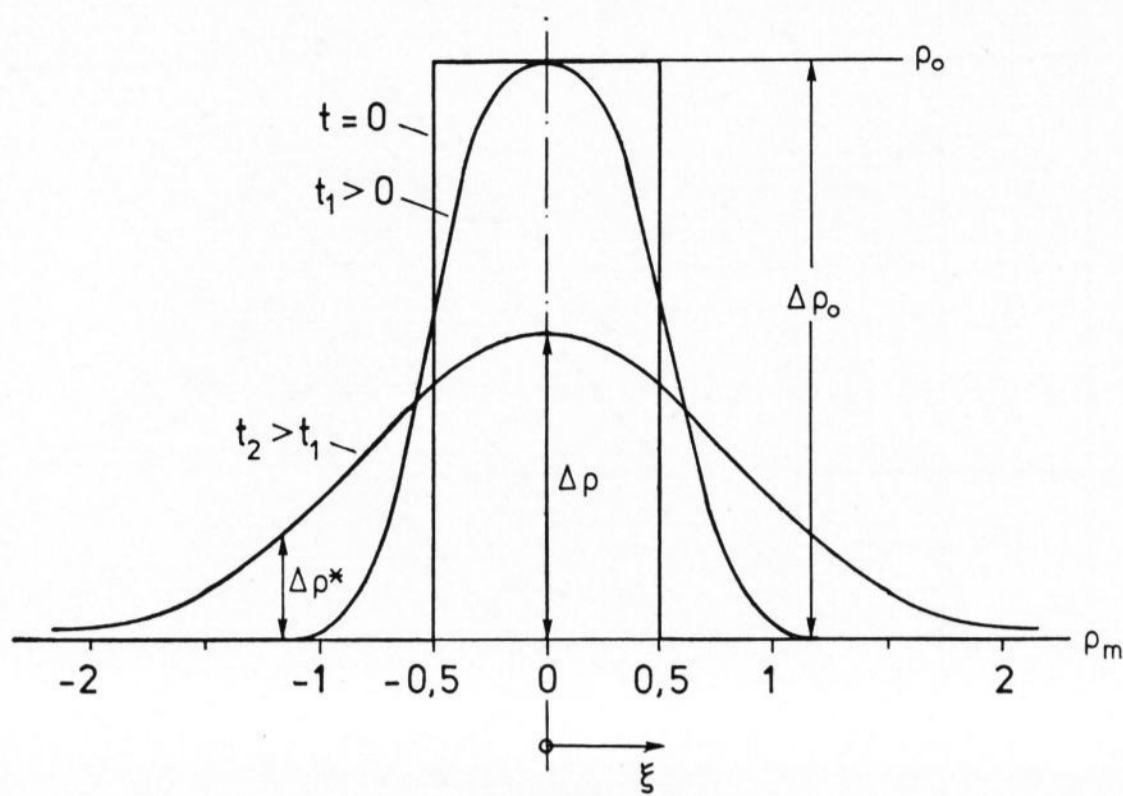


Bild 9. Konzentrationsverlauf bei einer Rechteckverteilung der Anfangskonzentration.

den meisten Fällen nur mit Hilfe eines numerischen Verfahrens bestimmen. Hierbei kann das durch Teilgebietslösung verbesserte Differenzenverfahren von Woelk [7] angewendet werden. Die Teilgebietslösung der Gleichung (13) ist bei Rhiel [8] enthalten.

Im folgenden wird die Abhängigkeit des Diffusionskoeffizienten von der Konzentration nicht berücksichtigt, da hierüber noch keine Meßergebnisse vorliegen [16]. Aus der Gleichung (13) folgt:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = D \cdot \frac{\partial^2 \rho}{\partial X^2} \tag{14}$$

Die Temperatur ϑ der von der Strömung mitgeführten Schliere ist vom Ort und damit von der Zeit abhängig. Aus $\vartheta = \vartheta(t)$ und $D = f(\vartheta)$ folgt:

$$D = f(\vartheta(t)) = D(t) \tag{15}$$

Die Funktion $D = f(\vartheta)$ ist von Becker [16] für verschiedene Glaskomponenten in Laborversuchen ermittelt worden.

Während des Deformationsvorganges rücken die Linien gleicher Konzentration 1 bis 5 (siehe Bild 8) im selben Verhältnis zusammen, wie die Schlierendicke abnimmt.

$$\frac{X}{X_0} = \frac{\delta}{\delta_0} \tag{16}$$

In der Gleichung (16) werden mit X und δ die aktuellen Werte zu einem Zeitpunkt t und mit X_0 und δ_0 die Anfangswerte bei $t = 0$, das heißt zu Beginn der Deformation und Diffusion, bezeichnet.

$$X = X(t) = X_0 \cdot \frac{1}{\delta_0} \cdot \delta(t) \tag{17}$$

Die Gleichung (14) läßt sich unter Berücksichtigung der Beziehungen (15) und (17) umformen in:

$$\frac{\partial \rho}{\partial z} = \frac{\partial^2 \rho}{\partial \xi^2} \tag{18}$$

mit
$$\xi = \frac{X}{\delta} = \frac{X_0}{\delta_0} \tag{19}$$

und
$$z = \frac{\int_0^t D \cdot \gamma^2 \cdot dt}{\delta_0^2} \tag{20}$$

wobei
$$\gamma = \gamma(t) = \frac{\delta_0}{\delta(t)} \tag{21}$$

ein Maß für die Schlierenverjüngung ist.

Die Konzentrationsverteilungen der vom Gemenge abschmelzenden und in die Strömung eintretenden Inhomogenitäten können sehr unterschiedlich sein. Mit Hilfe der Fourier-Reihe, deren Glieder Lösungen der Gleichung (18) sind, lassen sich verschiedene, periodisch in X -Richtung (Bild 8) verlaufende Konzentrationen beschreiben. Im Vergleich hierzu ist der in Bild 9 gezeichnete Verlauf der Anfangskonzentration hinsichtlich der Homogenisierung ungünstiger, wie sich an Hand der entsprechenden Lösungen der Gleichung (18) zeigen läßt.

Geht man von der in Bild 9 dargestellten Rechteckverteilung als Anfangskonzentration aus, so ergibt sich für die normierte Überkonzentration $\Delta \rho / \Delta \rho_0$ in der Mitte der Schliere ($\xi = 0$) nach Crank [17]:

$$\frac{\Delta \rho}{\Delta \rho_0} = \text{erf} \left(\frac{1}{4 \cdot \sqrt{z}} \right) \tag{22}$$

mit
$$\text{erf}(w) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_0^w \exp(-u^2) \cdot du \tag{23}$$

3.2.4. Homogenisierungskennzahl

Die Abnahme der Überkonzentration in der Mitte der Schliere hängt von der Schlierendicke zu Beginn der Deformation δ_0 und von den Homogenisierungsvorgängen in der Schmelze ab. Um die unterschiedlichen, entlang den verschiedenen Strömungsbahnen herrschenden Homogenisierungsbedingungen miteinander vergleichen zu können, wird als feste Bezugsgröße eine Anfangs-Schlierendicke von $\delta_0 = 1 \text{ mm}$ eingeführt. Wenn die Schliere den Durchlaß erreicht, gibt die verbleibende normierte Überkonzentration $\Delta \rho / \Delta \rho_0$ in der Schlierenmitte Auskunft über die Gesamtheit der Homogenisierungsvorgänge entlang der Strömungsbahn, auf der sich die Schliere in der Wanne von der Gemengedecke bis zum Durchlaß bewegt hat. Diese Überkonzentration soll im folgenden Homogenisierungskennzahl (Hk) genannt werden.

$$Hk = \frac{\Delta \rho}{\Delta \rho_0} \Big|_{\delta_0 = 1 \text{ mm}; t = t_v} \tag{24}$$

Ein hoher Wert dieser Kennzahl weist auf eine schlechte und ein niedriger Wert auf eine gute Homogenisierung hin.

Mit Hilfe der Homogenisierungskennzahl können verschiedene Wannenzustände miteinander verglichen werden, sofern man gleiche physikalische und chemische Eigenschaften der Glasschmelze voraussetzt. Bei Variation der Wannensparameter lassen sich aus dem Verlauf der Homogenisierungskennzahl die Haupteinflussfaktoren des Homogenisierungsprozesses und Tendenzen hinsichtlich der Homogenisierungswirkung der Glasströmungen erkennen. Hierdurch können Hinweise für eine optimale Wannenföhrung gewonnen werden.

4. Ergebnisse

Für eine Hohlglaswanne sind exemplarisch Berechnungen über die Homogenisierungsvorgänge durchgeführt worden, um die Anwendungsmöglichkeiten des

in Abschnitt 3. entwickelten mathematischen Modells aufzuzeigen.

4.1. Strömungsfeld

4.1.1. Ausgangsdaten zur Berechnung des Temperatur- und Strömungsfeldes

Die im folgenden aufgeführten Daten sind die Eingabewerte für das mathematische Modell von Leyens [6], mit dem das in Bild 10 dargestellte Strömungsfeld berechnet worden ist.

a) Glaseigenschaften (Weißhohlglas)

Spezifische Wärmekapazität: $c = 1230 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$

Dichte: $\rho_{\text{Gl}} = 2300 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$

Wärmeausdehnungskoeffizient: $\beta = 8,715 \cdot 10^{-5} \cdot \text{K}^{-1}$

Wärmeleitfähigkeit:

$$\frac{\lambda}{\text{W}/(\text{m} \cdot \text{K})} = 128,4 - 0,3173 \cdot \frac{\vartheta}{^\circ\text{C}} + 0,2552 \cdot 10^{-3} \cdot \left(\frac{\vartheta}{^\circ\text{C}}\right)^2 - 0,6125 \cdot 10^{-7} \cdot \left(\frac{\vartheta}{^\circ\text{C}}\right)^3 \quad (25)$$

Dynamische Viskosität: $\frac{\eta}{\text{kg}/(\text{m} \cdot \text{s})} = 0,1 \cdot 10^e \quad (26)$

mit $e = -0,351 + \frac{3165}{\frac{\vartheta}{^\circ\text{C}} - 301}$

Diffusionskoeffizient der Tonerde (Al_2O_3):

$$\frac{D}{\text{m}^2/\text{s}} = 10^{-6} \cdot \exp\left(-4,228 - \frac{16830}{T/\text{K}}\right) \quad (27)$$

b) Wannengeometrie (Bild 11)

Länge: $L = 10 \text{ m}$

Höhe: $H = 1 \text{ m}$

Breite: $B = 6 \text{ m}$

Durchlaß: $D_0 = 0,375 \text{ m}$

$D_u = 0 \text{ m}$

c) Betriebszustand

Durchsatz: $\dot{M} = 1,39 \text{ kg/s} = 120 \text{ t/d}$

Umgebungstemperaturen und Wärmedurchgangskoeffizienten:

Wannenboden: $\vartheta_B = 30 \text{ }^\circ\text{C}$; $k_B = 2,5 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$

Wand an der Einlegeseite: $\vartheta_E = 30 \text{ }^\circ\text{C}$; $k_E = 3,5 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$

Wand an der Durchlaßseite: $\vartheta_D = 30 \text{ }^\circ\text{C}$; $k_D = 3,5 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$

Es wird vorausgesetzt, daß sich die Oberofentemperatur ϑ_{Ob} und der Wärmeübergangskoeffizient an der Glasbadoberfläche α_{Ob} linear in x -Richtung zwischen den vorgegebenen Stützstellen ändern.

Stützstellenwerte:

$x = 0,0 \text{ m}$: $\vartheta_{\text{Ob}} = 1450 \text{ }^\circ\text{C}$; $\alpha_{\text{Ob}} = 800 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$

$x = 3,3 \text{ m}$: $\alpha_{\text{Ob}} = 450 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$

$x = 4,0 \text{ m}$: $\vartheta_{\text{Ob}} = 1610 \text{ }^\circ\text{C}$

$x = 7,0 \text{ m}$: $\vartheta_{\text{Ob}} = 1500 \text{ }^\circ\text{C}$

$x = 10,0 \text{ m}$: $\vartheta_{\text{Ob}} = 1380 \text{ }^\circ\text{C}$; $\alpha_{\text{Ob}} = 450 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$

Gemengeteppich: $S_1 = 3,3 \text{ m}$; $S_{1z} = 2,5 \text{ m}$

Hinsichtlich der Durchsatzströmung wird angenommen, daß die Geschwindigkeit, mit der das abschmelzende Gemenge in das Strömungsfeld ein-

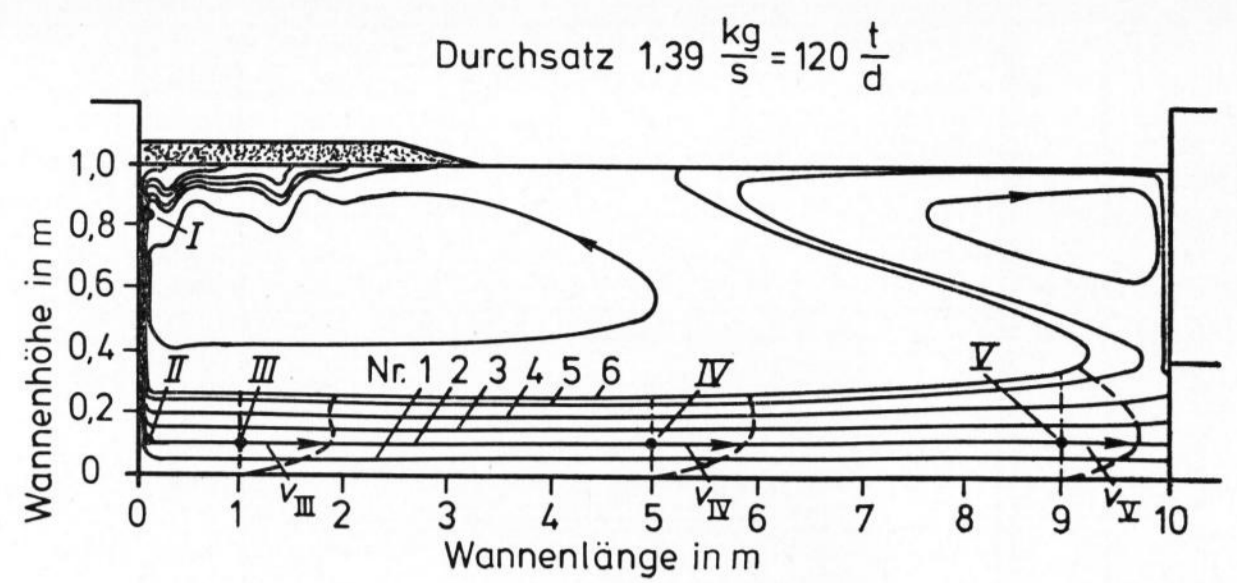


Bild 10. Strömlinien in der Symmetrieebene der Glasschmelzwanne.

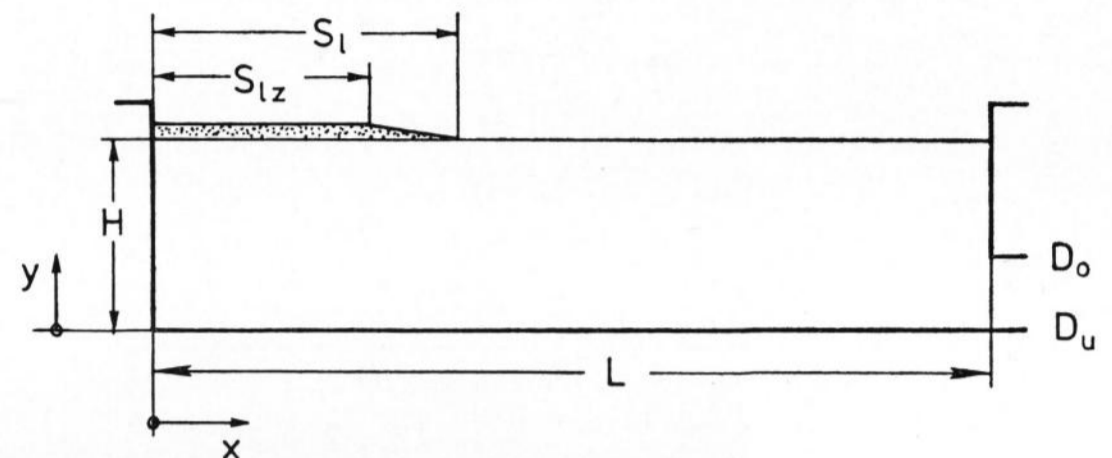


Bild 11. Prinzipskizze der Wanne (Symmetrieebene).

tritt, im Bereich $0 \leq x \leq S_{1z}$ konstant ist und von dort aus bis zum Ende der Gemengedecke ($x = S_1$) linear abfällt (Bild 11). Die getroffenen Annahmen werden bei Leyens [6] begründet.

4.1.2. Strömlinien des Strömungsfeldes

Das Strömungsfeld in Bild 10 ist im verzerrten Maßstab gezeichnet worden, um die Charakteristik der Strömung besser erkennen zu können. Bei einer maßstabgetreuen Wiedergabe des Strömungsfeldes würde die Wannenhöhe nur ein Drittel des gezeichneten Wertes betragen.

Bemerkenswert ist der Verlauf der Durchsatzströmung. Während der weitaus größte Teil des Durchsatzes vom Wannenboden aus direkt in den Durchlaß gelangt, wird nur ein sehr geringer Teil zur freien Oberfläche oberhalb der rechten Strömungswalze umgelenkt. Der Einfluß der Glaseigenschaften und der Wannenparameter auf das Temperatur- und Strömungsfeld ist an Hand mehrerer Beispiele von Leyens [6] untersucht worden.

4.2. Homogenisierung

4.2.1. Schlierenauflösung durch Deformation und Diffusion

Zur Erläuterung des in der Wanne stattfindenden Homogenisierungsprozesses wird im folgenden als Beispiel eine (Modell-) Schliere betrachtet, die sich auf der Stromlinie Nr. 2 (Bild 10) bewegt. Hinsichtlich der Homogenisierung ist diese Stromlinie als kritisch anzusehen, da sie nicht zur freien Glasbadoberfläche führt und zudem in einem etwas größeren Abstand vom Wannenboden verläuft, wo bereits hohe Geschwindigkeiten und geringe Scherungen herrschen.

Als Startbedingung wird angenommen, daß sich die Schliere an der Einlegeseite in etwa 0,8 m Höhe (I) befindet und dort senkrecht zur Strömungsrichtung steht. Man darf davon ausgehen, daß an dieser Stelle die Viskosität in der Umgebung der Schliere soweit ausgeglichen ist, daß die Schliere von der Strömung

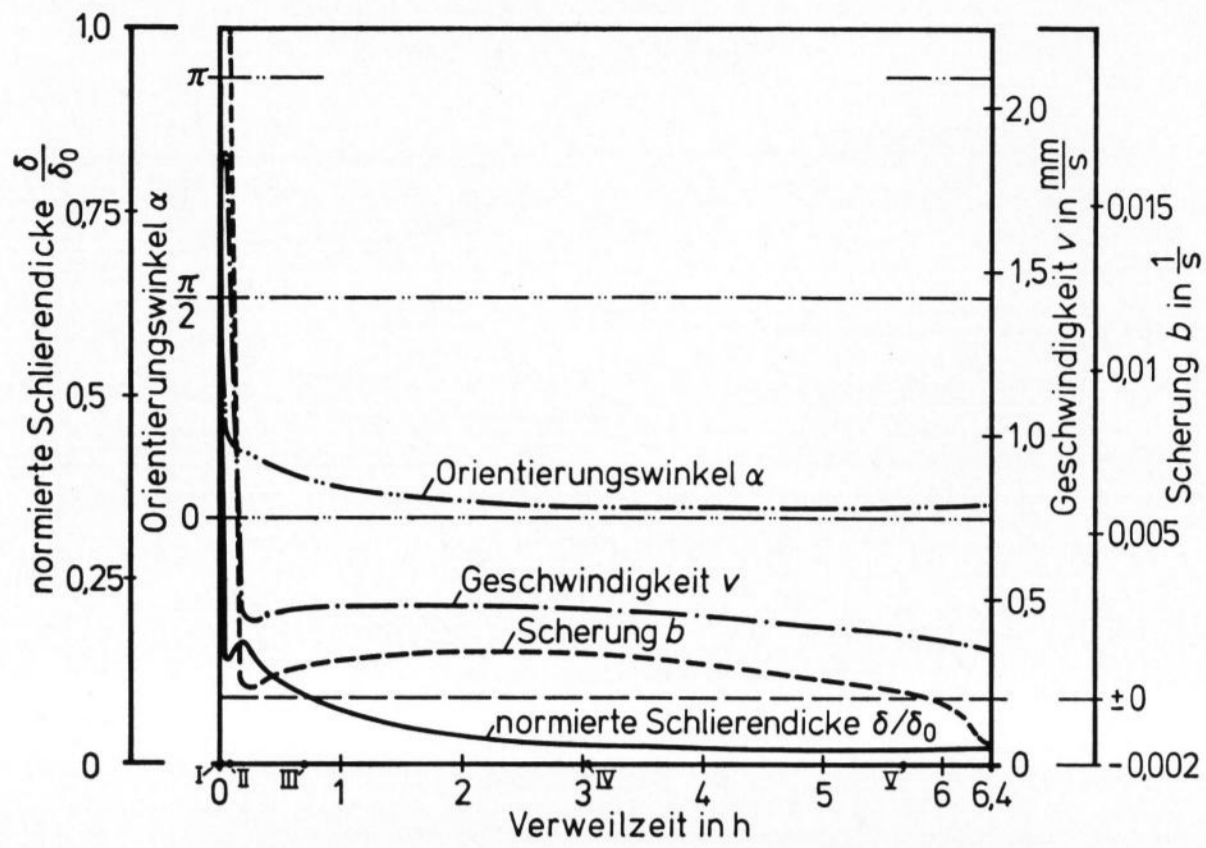


Bild 12. Schlierendeformation in der Schmelzwanne auf der Stromlinie Nr. 2.

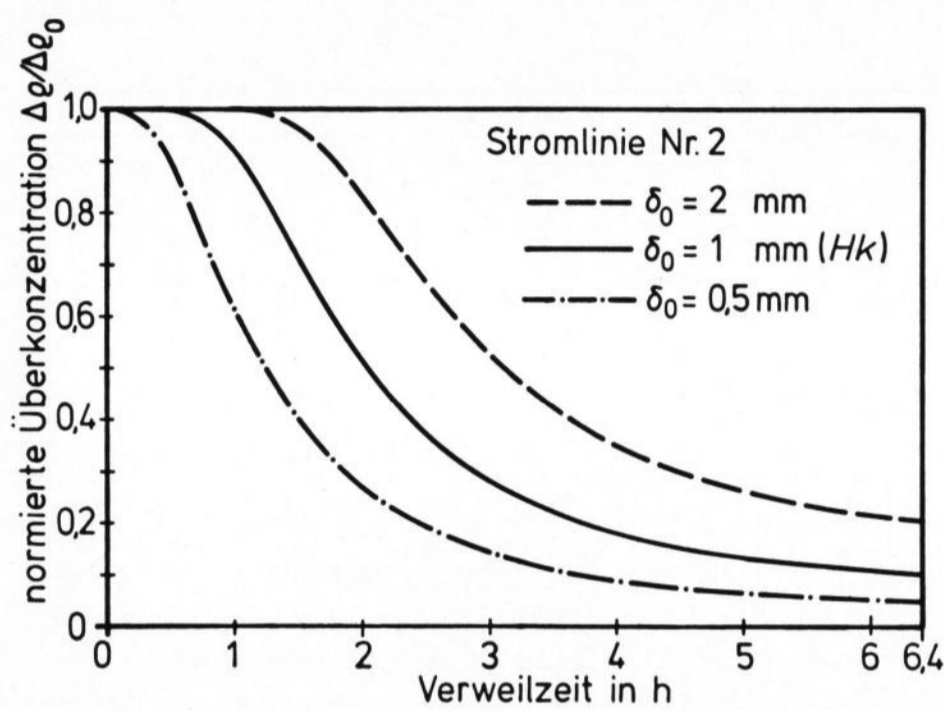


Bild 13. Abnahme der Überkonzentration in der Schlierenmitte.

deformiert werden kann. Auf dem Wege bis zum Durchlaß wird der Einfluß der verschiedenen strömungsmechanischen Größen auf die Deformation und Diffusion untersucht (Bild 12).

Entlang der Seitenwand an der Einlegeseite nehmen der Orientierungswinkel und die Schlierendicke rasch ab, da dort starke Scherströmung herrscht. Beim Erreichen des Wannenbodenbereichs (II) nimmt die Schlierendicke wieder zu. Dies ist darauf zurückzuführen, daß an dieser Stelle, wie aus dem Geschwindigkeitsverlauf abzulesen ist, der Strömungsquerschnitt größer wird und die Schliere dort bereits in Strömungsrichtung ausgerichtet ist. Während sich die Geschwindigkeit und die Scherung unterhalb der linken Hauptwalze nur wenig ändern, bewirkt die rechtsdrehende Gegenwalze ein stärkeres Abfallen dieser Größen. Vor dem Durchlaß wird die Scherung negativ, das heißt, die oberhalb der Stromlinie Nr. 2 liegenden Stromlinien weisen eine geringere Strömungsgeschwindigkeit auf als die Stromlinie Nr. 2. Der zunehmende Strömungsquerschnitt und die negative Scherung bewirken, daß sich die Schliere aufzurichten beginnt (der Orientierungswinkel wird größer) und wieder dicker wird.

Wie aus Bild 13 hervorgeht, bleibt die Konzentration zunächst nahezu konstant, da bei der vorgegebenen Anfangskonzentration nach Bild 9 zuerst ein Konzentrationsausgleich an der Schlierenbegrenzungsfläche stattfindet. Erst nach einer gewissen Zeit, die von der vorgegebenen Schlierendicke abhängt, wird das Konzentrationsgefälle in der Umgebung der Schlierenmitte größer und führt zu einer starken Abnahme der Über-

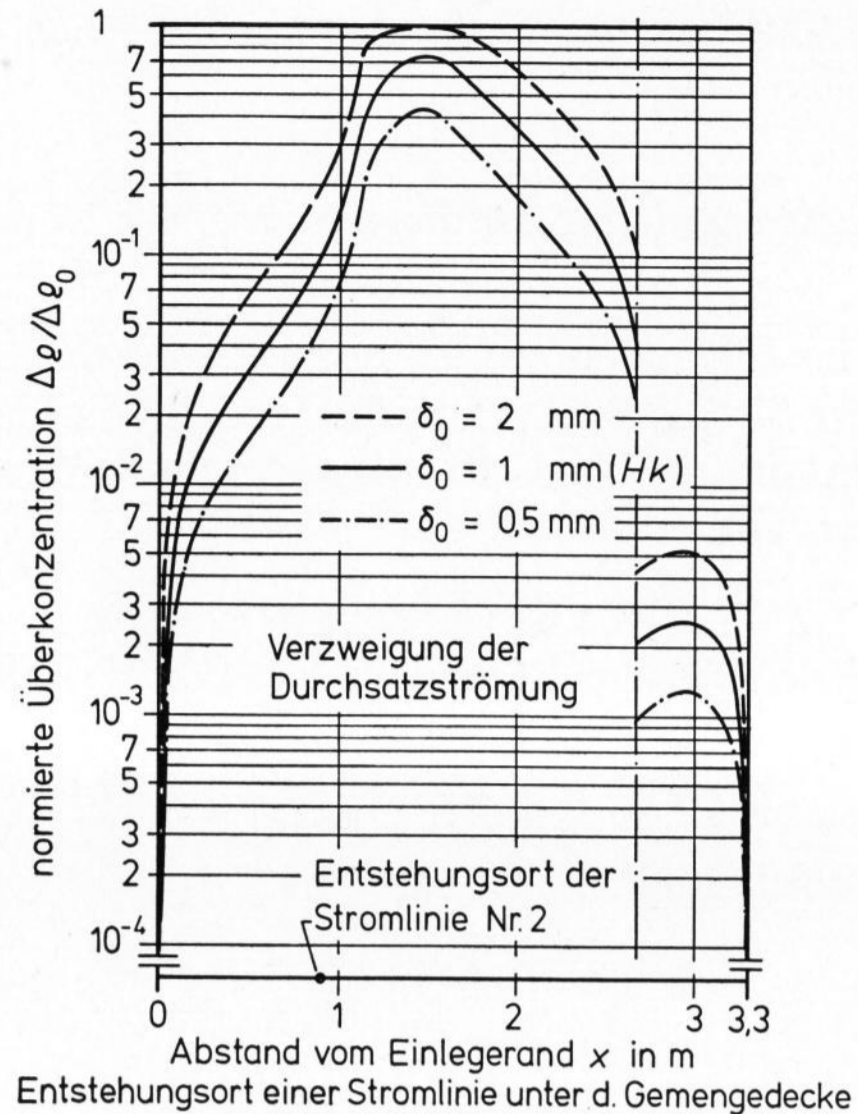


Bild 14. Überkonzentration in der Mitte der Schliere beim Erreichen des Durchlasses.

konzentration in der Schlierenmitte. Vor dem Durchlaß nimmt die Konzentration nur noch geringfügig ab. Dies ist darauf zurückzuführen, daß einerseits infolge der Diffusion das Konzentrationsprofil ausgeglichener ist und andererseits die Strömung keinen Beitrag mehr zur Schlierenverjüngung und der damit verbundenen Erhöhung des Konzentrationsgefälles leistet.

Nach 6,4 h erreicht die Schliere auf der Stromlinie Nr. 2 den Durchlaß. Die Überkonzentration der Schliere mit einer Anfangsdicke von $\delta_0 = 1 \text{ mm}$ ist dabei auf 10% des ursprünglichen Wertes abgebaut worden. Nach der Definition in Abschnitt 3.2.4. ist der Wert der Homogenisierungskennzahl für die Stromlinie Nr. 2 $Hk = 0,1$.

4.2.2. Homogenisierungswirkung der Glasströmung, Homogenisierungskennzahl

Da die Strömung in der Wanne laminar ist, sind die Stromlinien mit den Bahnverläufen der von der Strömung mitgeführten Teilchen identisch. Jedem Ort an der Grenzfläche zwischen Gemenge und Glasbad ist eine Stromlinie zugeordnet, die von dort bis zum Durchlaß führt. Der Weg, den ein Teilchen durch die Wanne nimmt, hängt davon ab, an welcher Stelle des Gemenges es abschmilzt, das heißt, in welchem Abstand vom Einlegerand es in das Strömungsfeld eintritt. Da die Homogenisierung vom Bahnverlauf abhängt, ist es sinnvoll, die Größen, die die Homogenisierung kennzeichnen, in Abhängigkeit des Abstandes vom Einlegerand darzustellen.

Bild 14 gibt die Überkonzentration von Schlieren verschiedener Anfangsdicken δ_0 beim Erreichen des Durchlasses wieder. Dabei entspricht die normierte Überkonzentration der Schliere mit $\delta_0 = 1 \text{ mm}$ der Homogenisierungskennzahl (Hk).

Für Stromlinien, die nahe am Einlegerand entstehen, also in Wand- und Bodennähe verlaufen, ergeben sich geringe Geschwindigkeiten und hohe Scherungen, die zu einer starken Abnahme der Überkonzentration und damit zu einer guten Homogenisierung führen. Die Homogenisierungswirkung bezüglich der Stromlinien, die direkt zum Durchlaß führen, wird entscheidend

bestimmt durch die Strömungsverhältnisse unterhalb der linken Hauptwalze. Wie die Geschwindigkeitsprofile in Bild 10 erkennen lassen, wird die Scherung mit zunehmendem Abstand vom Wannenboden geringer. Zudem nimmt die Verweilzeit infolge wachsender Geschwindigkeit ab. Hieraus erklärt sich die größer werdende Überkonzentration in Bild 14 bei zunehmendem Abstand vom Einlegerand. Der weitere Verlauf der Überkonzentration für die direkt zum Durchlaß führenden Stromlinien läßt sich ebenso an Hand der Geschwindigkeitsprofile aus Bild 10 deuten.

Unmittelbar vor dem Durchlaß teilen sich die Stromlinien. Die Stromlinien Nr. 1 bis 4 (Bild 10) gehen direkt zum Durchlaß, während die Stromlinien Nr. 5 und 6 an die Glasbadoberfläche oberhalb der rechten Gegenwalze führen. Verfolgt man die Stromlinien Nr. 4 und 5 zurück bis zum Gemengebereich, so läßt sich dort zwischen diesen Stromlinien eine Schnittstelle definieren, für die folgendes gilt: Alle links dieser Schnittstelle abschmelzenden Teilchen gehen vom Wannenboden aus direkt zum Durchlaß, während die Teilchen rechts davon den Weg entlang der freien Glasbadoberfläche nehmen. In Bild 14 wird die Schnittstelle durch einen Sprung der Kurvenverläufe markiert.

Der Verlauf der Überkonzentration für die Stromlinien, die zur freien Glasbadoberfläche führen, wird durch mehrere Einflüsse bestimmt. Hierzu zählen der längere Strömungsweg und die damit verbundene höhere Verweilzeit sowie die hohen Temperaturen an der Badoberfläche, die die Diffusion beschleunigen. Das zunächst geringfügige Anwachsen der Überkonzentration für die rechts neben der Schnittstelle entstehenden Stromlinien ist darauf zurückzuführen, daß die Scherung zur freien Glasbadoberfläche hin infolge fehlender Schubspannung gegen Null strebt. Die nachfolgende Abnahme der Überkonzentration läßt sich dadurch erklären, daß die entsprechenden Stromlinien in unmittelbarer Nähe der Seitenwand oberhalb des Durchlasses verlaufen, wo hohe Scherungen und geringe Geschwindigkeiten herrschen.

5. Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wird ein mathematisches Modell vorgestellt, das, basierend auf der substantiellen Betrachtungsweise, die Berechnung der Homogenisierungsvorgänge in Glasschmelzwannen ermöglicht. Das Modell geht von den Ergebnissen des auf der lokalen Betrachtungsweise beruhenden mathematischen Modells von Leyens aus, mit dem das Temperatur- und das Strömungsfeld in der Symmetrieebene der Schmelzwanne berechnet werden können.

In Hohlglaswannen werden die Schlieren durch Scherung und Änderung des Strömungsquerschnitts deformiert. Die hergeleiteten Formeln berücksichtigen, daß Scherung und Querschnittsänderung gleichzeitig auftreten können und über das Kontinuitätsgesetz miteinander verknüpft sind.

Die Schlierenverjüngung, die durch die Strömung verursacht wird, führt zu einer Erhöhung des Konzentrationsgefälles und damit zu einer progressiven Beschleunigung des Diffusionsprozesses. Es ist Aufgabe der Strömung, die Schlieren so zu deformieren und damit die für einen Konzentrationsausgleich erforderliche Diffusionszeit soweit herabzusetzen, daß sie in der Größenordnung der Verweilzeit liegt.

Das zweite Ficksche Gesetz ist dahingehend erweitert worden, daß die Abhängigkeit des Diffusionskoeffizienten von der Temperatur und beliebige Schlierendickenänderungen berücksichtigt werden können. Als Anfangs-Konzentrationsverlauf ist eine Rechteckverteilung gewählt worden, da diese Konzentrationsverteilung hinsichtlich der Homogenisierung am ungünstigsten ist. Die Lösung führt zu dem Fehlerintegral von Gauß.

Für eine von der Gemengedecke bis zum Durchlaß führende Strömungsbahn sind die Deformation und der Konzentrationsausgleich einer (Modell-) Schliere berechnet worden. Aus dem Abbau der Überkonzentration der Schlieren, die auf verschiedenen Strömungsbahnen den Durchlaß erreichen, läßt sich die Homogenisierungswirkung der Glasströmung erkennen.

Um die unterschiedlichen Homogenisierungsbedingungen entlang den verschiedenen, von der Gemengedecke bis zum Durchlaß führenden Strömungsbahnen miteinander vergleichen zu können, ist eine Kennzahl, nämlich die Homogenisierungskennzahl, hergeleitet worden. Bei Variation der Wannenparameter lassen sich aus dem Verlauf dieser Zahl Tendenzen hinsichtlich der Schmelzleistung ablesen, wodurch Hinweise für eine optimale Wannenführung gewonnen werden können.

Obwohl die Ergebnisse nur für die Vorgänge in der Symmetrieebene der Wanne gelten, lassen sich hieraus die kritischen Bedingungen erkennen, da in dieser Ebene die kürzeste Verweilzeit zu erwarten ist.

Die Durchführung der Arbeit wurde durch finanzielle Unterstützung seitens des Bundesministeriums für Wirtschaft über die Arbeitsgemeinschaft Industrieller Forschungsvereinigungen (AIF), Köln, und der Hüttentechnischen Vereinigung der Deutschen Glasindustrie (HVG), Frankfurt (Main), ermöglicht. Für diese Hilfe sei an dieser Stelle nochmals bestens gedankt.

6. Symbolsammlung

6.1. Formelzeichen und Einheiten

A	= Strömungsquerschnitt in m^2
a	= Geschwindigkeitszunahme in Bahnrichtung bezogen auf die Weglänge in s^{-1} (zeitliche Verengung des Strömungsquerschnitts bei substantieller Betrachtungsweise)
B	= Wannenbreite in m
b	= Scherung in s^{-1} (substantielle Betrachtungsweise)
c	= spezifische Wärmekapazität in $J kg^{-1} K^{-1}$
D	= Diffusionskoeffizient in $m^2 s^{-1}$
D_o	= Höhe der Durchlaßoberkante über dem Wannenboden in m
D_u	= Höhe der Durchlaßunterkante über dem Wannenboden in m
\vec{dv}	= differentielle Geschwindigkeitsänderung in $m s^{-1}$
H	= Wannenhöhe in m
Hk	= Homogenisierungskennzahl
k	= Wärmedurchgangskoeffizient in $W m^{-2} K^{-1}$
L	= Wannenlänge in m
l	= Schlierenlänge in mm
\dot{M}	= Massenstrom; Durchsatz in $kg s^{-1}$
S_1	= Länge des Gemengepfeils in m
S_{iz}	= Abstand in m zwischen Einlegerand und der Stelle des Gemengepfeils, bis zu der das Gemenge mit konstanter Geschwindigkeit abschmilzt
T	= Temperatur in K
t, t_r	= Zeit in s
t_v	= Verweilzeit in s
\vec{v}	= Strömungsgeschwindigkeit der Schmelze in $m s^{-1}$
X	= Ortskoordinate für die Schlierendicke in mm
x	= Ortskoordinate für die Wannenlänge in m
y	= Ortskoordinate für die Wannenhöhe in m
α	= Orientierungswinkel zwischen Schliere und Strömung

α_{Ob} = Wärmeübergangskoeffizient an der Glasbadoberfläche in $W m^{-2} K^{-1}$
 β = thermischer Ausdehnungskoeffizient in K^{-1}
 γ = Schlierenverjüngungsfaktor
 δ = Schlierendicke in mm
 ε = Ortskoordinate senkrecht zur Bahnrichtung in m
 ζ = Ortskoordinate in Bahnrichtung in m
 η = dynamische Viskosität in $kg m^{-1} s^{-1}$
 ϑ = Temperatur in $^{\circ}C$
 λ = Wärmeleitfähigkeit in $W m^{-1} K^{-1}$
 ξ = dimensionslose Ortskoordinate für die Schlierendicke
 ϱ_{Gl} = mittlere Dichte der Glasschmelze in $kg m^{-3}$
 ϱ = Massenkonzentration in $kg m^{-3}$ der Glaskomponente Al_2O_3 in der Glasschmelze
 ϱ_m = mittlere Massenkonzentration der Glaskomponente Al_2O_3 im Grundglas in $kg m^{-3}$
 $\Delta\varrho$ = Konzentrationsunterschied zwischen Schliere und Grundglas in $kg m^{-3}$ hinsichtlich der Glaskomponente Al_2O_3

$\frac{\Delta\varrho}{\Delta\varrho_0}$ = normierte Überkonzentration in der Schlierenmitte hinsichtlich der Glaskomponente Al_2O_3
 ω = Winkelgeschwindigkeit in s^{-1}

6.2. Indizes

B = Wanneboden
D = Wand an der Durchlaßseite
E = Wand an der Einlegeseite
G = Grundglas
Ob = Oberofen
S = Schlierenglas
x = x-Richtung
y = y-Richtung
 ε = ε -Richtung
 ζ = ζ -Richtung
0 = Zeitpunkt $t = 0$ (Start)

7. Literatur

- [1] Truckenbrodt, E.: Strömungsmechanik. Berlin, Heidelberg, New York: Springer 1968.
- [2] Rhiel, F. F.: Beitrag zur Berechnung der Läutervorgänge in Glasschmelzwannen. Glastechn. Ber. 49 (1976) Nr. 11. (Im Druck.)
- [3] Geffcken, W.: Vorgänge der Homogenisierung in der Schmelze, Ausziehen der Schlieren, Diffusion. Glastechn. Ber. 30 (1957) S. 143 – 145.
- [4] Cooper, A. R. jr.: Diffuse mixing in continuous laminar flow systems. Chem. Engng. Sci. 21 (1966) S. 1095 bis 1106.
- [5] Cooper, A. R. jr.: Kinetics of mixing in continuous glass melting tanks. Glass Technol. 7 (1966) S. 2 – 11. [Ref. Glastechn. Ber. 40 (1967) S. 358.]
- [6] Leyens, G.: Beitrag zur Berechnung zweidimensionaler Konvektionsströmungen in kontinuierlich betriebenen Glasschmelzwannen. Teil 1. Mathematisches Modell. Teil 2. Ergebnisse der Berechnungen. Glastechn. Ber. 47 (1974) S. 251 – 259, 261 – 270.
- [7] Woelk, G.: Verbesserung von Differenzenverfahren durch Teilgebietslösungen. Wärme- u. Stoffübertragung 7 (1974) S. 208 – 214.
- [8] Rhiel, F. F.: Beitrag zur Berechnung der Homogenisierungs- und Läutervorgänge in Glasschmelzwannen. Fak. f. Bergbau u. Hüttenwes. d. Rhein.-Westf. Techn. Hochschule Aachen, Dr.-Ing.-Diss. 1976.
- [9] Jordan-Engeln, G. und Reutter, F.: Numerische Mathematik für Ingenieure. Mannheim, Wien, Zürich: Bibliogr. Inst. 1972.
- [10] Späth, H.: Spline-Algorithmen zur Konstruktion glatter Kurven und Flächen. München, Wien: Oldenbourg 1973.
- [11] Böhmer, K.: Spline-Funktionen. Stuttgart: Teubner 1974.
- [12] Giegerich, W. und Trier, W.: Glasmaschinen. Berlin, Göttingen, Heidelberg: Springer 1964. [Ref. Glastechn. Ber. 37 (1964) S. 225.]
- [13] Lakatos, T.; Johansson, L.-G. und Simmingsköld, B.: Viscosity-temperature relations in the glass system $SiO_2-Al_2O_3-Na_2O-K_2O-CaO-MgO$ in the compositional range of technical glasses. Glass Technol. 13 (1972) S. 88 – 95. [Ref. Glastechn. Ber. 46 (1973) 73R1326.]
- [14] Brückner, R.: Die zu Erosionen an Modellschmelzen und feuerfesten Stoffen führenden Grundmechanismen der Grenzflächenkonvektion. Glastechn. Ber. 40 (1967) S. 451 – 462.
- [15] Spencer, R. S. und Wiley, R. M.: The mixing of very viscous liquids. J. Colloid Sci. 6 (1951) S. 133 – 145.
- [16] Becker, H.: Über die Diffusion von Tonerdeschlieren in Tafelglas. Glastechn. Ber. 39 (1966) S. 519 – 524.
- [17] Crank, J.: The mathematics of diffusion. 2nd ed. Oxford: Clarendon Press 1975.

76R1427