Hüttentechnische Vereinigung der Deutschen Glasindustrie E. V., Frankfurt am Main

DK 666.1.031.13:532.5 August 1960

H V G - Mitteilung Nr. 849

Berechnung von Konvektionsströmungen in Glasschmelzwannen

Die Glasströmungsverhältnisse in einem Wannenofen sind trotz ihrer entscheidenden Bedeutung für die Technologie der Glaserzeugung nur bis zu einem gewissen Grade bekannt, obwohl man sich schon früh mit dem Problem beschäftigt hat (z.B. (1)). Dies liegt einmal daran, daß es wegen der hohen Temperaturen und der Korrosivität des Glases sehr schwierig ist, Geschwindigkeits- und Temperaturverteilungen innerhalb des Glasbades zu messen. Andererseits führt die rein theoretische Behandlung auf so komplizierte mathematische Zusammenhänge, daß es nicht möglich erscheint, diese mit normalen Rechenmitteln, etwa elektrischen Tischrechenmaschinen, auszuwerten. Man hat sich bisher auf die Verfolgung einiger halbempirischer Ansätze beschränkt (z.B. (2)), wobei man gewisse Vereinfachungen und Vernachlässigungen in Kauf nahm.

Nachdem es mit Hilfe neuzeitlicher elektronischer Rechenmaschinen möglich ist, sehr umfangreiche Rechnungen, die man bisher mit erträglichem Aufwand nicht lösen konnte, zahlenmäßig durchzuführen, erscheint es aussichtsreich, das Problem der Strömung in Glasschmelzwannenöfen rein theoretisch in Angriff zu nehmen und zu versuchen, einzelne Lösungen des komplizierten Gleichungssystemes zu finden.

Mechanisch gesehen handelt es sich bei den Glasströmungen um die durch Heizung von außen angetriebene, zeitlich stationäre Konvektionsströmung einer zähen Flüssigkeit mit freier Oberfläche innerhalb eines geschlossenen Behälters. Die Geschwindigkeitsverteilung hängt eng mit der Temperaturverteilung zusammen. Zur Beschreibung der Vorgänge tritt daher neben die N a v i e r - S t o k e s schen Gleichungen und die Kontinuitätsgleichung als Strömungsgleichungen die Energiegleichung, und es entsteht ein System nichtlinearer Differentialgleichungen höherer Ordnung. Dieses für jedes Stoffelement innerhalb des Bades geltende System ist für aus Konstruktion und Betrieb vorgegebene Randbedingungen wie Geometrie und Verteilung der Temperatur an den Bassinwänden und über dem Glasspiegel zu lösen. Solche Untersuchungen sind nicht nur für die Theorie der Glasschmelzöfen wünschenswert, sondern können auch für die Behandlung anderer Probleme der Verfahrenstechnik interessant sein.

An der Technischen Hochschule Darmstadt werden nun derartige theoretische Untersuchungen auf der Basis eines Ansatzes der HVG vorgenommen. Das Ziel ist, die funktionellen Zusammenhänge der durch Konvektion bedingten Strömungen in Glasschmelzwannen zu erkennen.

Weniger Wert wird auf die genaue Berechnung einzelner bestimmter Beispiele gelegt. Den Untersuchungen wurden daher allgemeine Voraussetzungen zugrunde gelegt, wie sie möglichst gut den praktisch gegebenen Bedingungen entsprechen. Zur allgemeinen Darstellung sind, da es sich um numerische Rechnungen handelt, entsprechende Parametervariationen vorgesehen. Bisher sind die Gleichungen aufgestellt worden, die Rechenmethode wurde ermittelt und

ein stark vereinfachtes Beispiel für drei Fälle durchgerechnet. Schließlich wurde die Anwendung der bisher verwendeten Rechenweise auf schwierigere Fälle untersucht. Die Ergebnisse sind in Form eines 1.Berichtes in der Bibliothek der DGG schriftlich niedergelegt. Im folgenden wird eine kurze Zusammenfassung der bisherigen Arbeit gegeben:

1. Aufstellung der Gleichungen

Stationäre Verhältnisse und zweidimensionale Betrachtungsweise vorausgesetzt, wurden die drei Grundgleichungen: N a v i e r - S t o k e s' sche Gleichung, Energie- und Kontinuitätsgleichung zu zwei nichtlinearen partiellen Differentialgleichungen 4.Ordnung für das Geschwindigkeitspotential und die Temperaturverteilung zusammengefaßt. Es wird die S t o k e s'sche Stromfunktion ψ, ein Vektorpotential eingeführt, die derart definiert ist, daß ihre partiellen Ableitungen nach den beiden Komponenten des zweidimensionalen Feldes bis auf einen konstanten Faktor die Geschwindigkeitskomponenten ergeben. Diese Rechengröße gestattet es vorteilhafterweise, anstatt zweier Veränderlicher nur eine anzunehmen, so daß die Differentialgleichungen nur ψ und die Temperatur als Veränderliche enthalten.

Da Ähnlichkeitsbetrachtungen bekanntlich wesentliche Vorteile bieten, wurde auch bei diesen Rechnungen eine dimensionslose Zahl, die R a y l e i g h - Zahl A eingeführt, in der alle charakteristischen Größen sowohl der Schmelze als auch des Bades, wie maximale und minimale Temperatur und die Becken-Abmessungen, auftreten. Die Einführung von A ermöglicht es also, daß Lösungen für einen Wert von A, für den die Rechnung etwa durchgeführt ist, beliebige Variationen innerhalb von A (Änderung der Dichte-Temperaturabhängigkeit, Badabmessungen und -temperaturen usw.) zulassen, sie also auf alle Annahmen angewendet werden können, für die A konstant bleibt.

2. Mathematische Formulierung der Randbedingungen

Als zulässige Randbedingungen wurden die folgenden Voraussetzungen mathematisch formuliert:

a) Die Geschwindigkeit an den Wänden sei Null.

b) Die Flüssigkeit soll an der Oberfläche nicht aufreißen.

c) Längs der freien Oberfläche herrsche konstanter Druck (Atmosphärendruck).

d) Die Entnahmeströmung soll vernachlässigt werden.

e) Die Dichte ändere sich linear mit der Temperatur.

f) Die Randtemperaturen werden numerisch vorgegeben, da eine funktionelle Vorgabe eine jeweilige Änderung des Rechenprogrammes erfordern würde, was bei numerischer Eingabe, die selbstverständlich jeweils entsprechend einer gewünschten Funktion vorangesetzt wird, nicht notwendig ist.

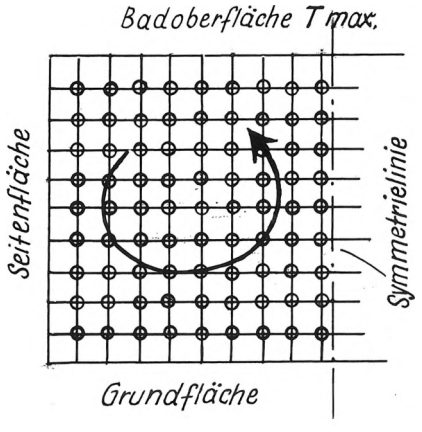
   Es befinde sich ein Temperaturmaximum in der Mitte der Schmelzoberfläche.

g) Die Verhältnisse in der Wanne seien symmetrisch in Bezug auf die Mittellinie, so daß stets nur die halbe Wannenbreite x Wannenhöhe betrachtet werden muß.

h) Das angenommene Verhältnis der Badabmessungen sei Höhe : Breite = 1 : 2, das aus Symmetriegründen betrachtete Feld hat daher ein Seitenverhältnis 1 : 1.

3. Rechenmethode

Es wurde eine Rechenmethode in iterativen Schritten gewählt, die als Reihenentwicklung nach Potenzen der R a y l e i g h - Zahl aufgefaßt werden kann. Als weitere Voraussetzung wurden Zähigkeit und Temperaturleitfähigkeit als temperaturunabhängig angenommen. Bei der Berechnung wurde das Differenzenverfahren (Übergang von den Differentialquotienten in der Differentialgleichung eines Kontinuums zu Differenzenquotienten eines ebenen Punktgitters mit 9 x 9 Gitterpunkten) angewendet und das Gleichungssystem durch Relaxation gelöst.



Der Gang der Rechnung ist daher folgender: Über das zu untersuchende Feld wird ein Netz gelegt, für das die Werte an den Gitterpunkten errechnet werden. Die Anzahl dieser Gitterpunkte ist für jedes Problem durch die Größe und Geschwindigkeit der Rechenmaschine, die das zugehörige Gleichungssystem löst, nach oben beschränkt. Es gibt also eine Höchstzahl, für die mit noch erträglichem Aufwand eine Lösung ermittelt werden kann. Dadurch sind auch den Abmessungen des Bades (für bestimmte übrige Voraussetzungen) eine obere Grenze gesetzt, da die Berechnung nur solange sinnvoll ist, als die Maschenweite nur so groß ist, daß noch keine wesentlichen Teile der Lösungskurven (z.B. Maxima und Minima) durch die Ungenauigkeit des Netzes unterdrückt werden; dies wiederum hängt von der angenommenen R a y l e i g h - Zahl ab.

Eine versuchte Lösung durch Funktionenansatz führte zu nicht vertretbar langen Rechenzeiten und erwies sich damit als vorläufig nicht durchführbar. Dasselbe gilt für die Annahme temperaturabhängiger Zähigkeit und Temperaturleitfähigkeit.

4. Errechnung eines Beispieles und Diskussion der Ergebnisse

Die Rechenmaschine Typ IBM 650 läßt eine Berechnung des vorliegenden Problems mit höchstens 9 x 9 Gitterpunkten zu, da für mehr Gitterpunkte bei dieser Maschine die notwendige Rechenzeit zu stark ansteigt. Da die Randbedingungen vorgegeben sind (Temperatur der Bodenfläche und der Randflächen konstant, Temperatur der Oberfläche linear ansteigend zur Mitte hin) ergibt die Rechnung für die Lösung 9 x 9 Innenpunkte für Temperatur und Potential. Mit dieser Maschenzahl liegt die obere Grenze der möglichen Annahme für die R a y l e i g h - Zahl bei etwa $3{,}8 \cdot 10^5$. Die Rechnung wurde für $A_1 = 3{,}8 \cdot 10^3$, $A_2 = 3{,}8 \cdot 10^4$ und $A_3 = 3{,}8 \cdot 10^5$ durchgeführt, für $2A_3$ ergaben sich schon keine sinnvollen Lösungen mehr (s. Diskussion der Ergebnisse a) und b)). Zahlreiche für Glasschmelzen interessierende Werte liegen leider bei $A = 2 \cdot 10^7$.

a) Die Temperaturkurven zeigen bei steigendem A ein ausgeprägtes Maximum, besonders der oberen Schichten nahe der Randfläche, bei $A_1 = 3{,}8 \cdot 10^4$ ist dieses nur angedeutet. Für höhere Werte von A könnten sich evtl. gegen die Mitte noch weitere Maxima ausbilden (oszillierender Verlauf).

Sehr wahrscheinlich fällt schon bei geringfügig höherem A ($A > 3{,}8 \cdot 10^5$) das erste Maximum in den Zwischenraum zwischen Rand und ersten Gitterpunkt (Spalte), so daß es bei gleichbleibender Maschenanzahl gar nicht mehr erscheinen würde und man auf vollständig falsche Verhältnisse schließen würde. Für höhere Werte von A müßte das Netz daher feiner sein. Es wäre evtl. möglich, die Rechenzeit gegenüber einer vollständigen Verfeinerung des Netzes dadurch zu verkürzen, daß das Gitter nur für den Teil verfeinert wird, in dem es notwendig erscheint, z.B. für einen Quadranten. Für den vorliegenden Fall könnte man den oberen Randquadranten verfeinern, allerdings nur dann, wenn sich bei der Erhöhung von A keine wesentliche Änderung in den anderen Quadranten ausbildet. Speicherraum muß aber auch für die anderen nicht gezogenen Gitterpunkte vorhanden sein. Es gibt bereits praktisch Fälle, in denen ein Strömungsbild, wie es durch A_3 charakterisiert wird, auftreten kann, doch würde den meisten Fällen ein $A > A_3$ entsprechen - bis etwa $A = 2 \cdot 10^7$. Dafür müßte etwa jede Masche des 9x9-Netzes in beiden Richtungen 10-fach unterteilt werden. Auf jeden Fall kann die Verfeinerung nur schrittweise geschehen (etwa jeweilige Verdoppelung), um die Änderung in den übrigen Quadranten verfolgen zu können. Es ist zu hoffen, daß sich die Veränderungen in der Hauptsache auf den oberflächenrandnahen Bereich (linke obere Ecke der Skizze) beschränken.

b) Potentiallinien

Es zeigte sich, daß mit steigendem A eine Erhöhung des Maximums und seine Verschiebung nach dem Rand zu erfolgt, deshalb gilt in Bezug auf die Rechengenauigkeit (Gitterpunkte) ähnliches wie für a).

5. Zusammenfassung und weiteres Vorgehen

Vorerst haben die Ergebnisse mehr akademischen als praktischen Wert, da sie sich in Bereichen bewegen, die Glasschmelzwannen nicht entsprechen. Sie lassen jedoch prinzipielle Verhältnisse erkennen und zeigen, auf welche Weise man Lösungen erhalten kann. Um zu einem ersten Abschluß zu kommen, werden die Beispiele in dem bisherigen Bereich vervollständigt, um den Gang der Verhältnisse in Abhängigkeit von A klarer herauszustellen. Mit graphischen Darstellungen und physikalischer Interpretation auch für die Bedeutung der angenommenen Voraussetzungen für die Glasschmelze werden die bisherigen Ergebnisse in einem 1.Bericht zusammengefaßt werden. Weiterhin ist eine Verfeinerung des Netzes vorgesehen, um den die Glasindustrie interessierenden Fällen näher zu kommen; es wird dazu ein Rechenplan für einen größeren Rechenautomaten, der voraussichtlich im Herbst in Düsseldorf aufgestellt wird, ausgearbeitet. Weiter versucht man, temperaturabhängige Zähigkeit und Temperaturleitfähigkeit zu berücksichtigen und von dem Wannenseitenverhältnis 1:2 zu 1:4 und 1:8 überzugehen.

Schrifttum:

1) P e y c h è s , J.: Konvektionsströmungen in Glasschmelzwannenöfen. Verres et Réfractaires (1947) H.3, S.3-17. Ref. Glastechn.Ber.22(1948/49) S.370.

2) S a w a i , I. und T a k a h a s h i , K.: Flow of Molten Glass in the Melting Chamber of a Tank Furnace. Schmelzsymposium Brüssel (1958).