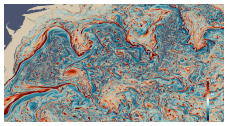


Schlussbericht

Verbundprojekt

ExaOcean: Leistungsverbesserung des ICON-O Ozeanmodells auf heterogenen Exascale-Supercomputern mit Methoden des Maschinellen Lernens

Zuwendungsempfänger	TU Hamburg
Förderkennzeichen	16ME0679K
Laufzeit	10/2022 – 09/2025
Projektleitung	D. Ruprecht, TU Hamburg
Beteiligte	P. Freese, J. Fregin, S. Götschel, T. Lunet

Die Verantwortung für den Inhalt dieser Veröffentlichung liegt bei den Autoren.

Bundesministerium
für Forschung, Technologie
und Raumfahrt

Inhaltsverzeichnis

1 Kurze Darstellung des Vorhabens **3**

1.1 Aufgabenstellung 3

1.2 Voraussetzungen zur Durchführung und wissenschaftlicher Stand . . . 4

1.3 Planung und Ablauf 4

1.4 Zusammenarbeit mit anderen Stellen 6

2 Eingehende Darstellung der erzielten Ergebnisse, mit Gegenüberstellung der vorgegebenen Ziele **7**

3 Notwendigkeit und Angemessenheit der geleisteten Arbeit **7**

4 Wichtigste Positionen des zahlenmäßigen Nachweises **8**

5 Voraussichtlicher Nutzen und Verwertbarkeit im Sinne des fortgeschriebenen Verwertungsplanes **9**

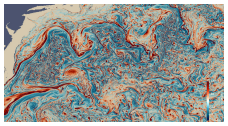
5.1 Wirtschaftliche Anschlussfähigkeit 9

5.2 Wissenschaftliche-technische Anschlussfähigkeit 9

6 Neue projektrelevante FE-Ergebnisse von dritter Stelle **10**

7 Erfolgte und geplante Veröffentlichungen **10**

8 Sonstige Literatur **11**



1 Kurze Darstellung des Vorhabens

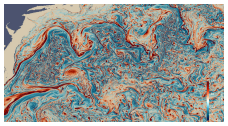
1.1 Aufgabenstellung

Computersimulationen auf Hochleistungsrechnern sind ein unverzichtbares Werkzeug in den Natur- und Ingenieurwissenschaften. Die in vielen Problemen auftretenden, stark unterschiedlichen Raum- und Zeitskalen übersetzen sich in immer komplexer werdende mathematische Modelle, zu deren numerischer Lösung zunehmend leistungsstärkere Rechnersysteme notwendig sind. Die neueste Generation von Hochleistungsrechnern wie JUPITER am Jülich Supercomputing Centre mit Rechenleistungen im Exascale Bereich erlauben es, Modelle mit nie dagewesener Auflösung zu rechnen und somit völlig neue Einblicke und Erkenntnisse zu gewinnen.

Essentiell ist hierbei aber die Entwicklung moderner numerischer Algorithmen, welche die durch die Hardware dieser Systeme bedingten Besonderheiten berücksichtigen. Hierbei stehen insbesondere zwei Herausforderungen im Vordergrund. Zum einen der extreme Grad an Parallelität, den eine Simulationssoftware für die Nutzung solcher Systeme ermöglichen muss, zum anderen die zunehmend heterogene Natur moderner Hochleistungsrechner, welche CPUs, Grafikarten (GPUs) und andere Beschleuniger kombinieren.

Ziel von ExaOcean war es, mittels einer Kombination von klassischen diskreten Algorithmen und Methoden des maschinellen Lernens (ML) den Durchsatz des ICON-O Ozeanmodells, gemessen in simulierten Tagen pro 24h Laufzeit, um mindestens einen Faktor sechs zu verbessern. Über die Laufzeitreduktion hinaus sollte auch gezeigt werden, dass dieser Ansatz durch die Kombination von ML- und gitter-basierten Verfahren die effizientere Nutzung heterogener HPC-Systeme ermöglicht.

Speziell sollten zwei neue algorithmische Ansätze entwickelt werden: ein „parallel spectral deferred correction“ (PSDC) genanntes numerisches Zeitschrittverfahren, welches eine bessere Ausnutzung von Mehrkern-CPUs mittels kleinskaliger Parallelisierung in der Zeit ermöglicht und ein „dynamic super-resolution“ (DSR) Ansatz, welcher Techniken aus der Bildverarbeitung zur ML-gestützten Auflösungsverbesserung für dynamische Simulationen adaptiert. Das Ziel war eine Verbesserung der parallelelen Skalierbarkeit durch PSDC und eine Reduktion des Gesamtrechenaufwands durch DSR dadurch, dass die ML-basierte Korrektur die Verwendung gröberer Gitter ohne Genauigkeitsverlust der Simulation ermöglicht.



1.2 Voraussetzungen zur Durchführung und wissenschaftlicher Stand

ICON-O ist die Ozeankomponente des operationellen ICON Erdsystemmodells, welches am MPI-M entwickelt und u.a. vom Deutschen Wetterdienst für die operative Wettervorhersage verwendet wird. Im Rahmen des „sub-mescoscale telescope“ Experiments wurden mit ICON-O hochaufgelöste Simulationen der sub-mesoskaligen Wirbel im Nordatlantik durchgeführt [8]. Hierfür waren lokal Auflösungen von circa 600m notwendig, weswegen die Simulationen nur über einen Zeitraum von drei Monaten in akzeptabler Laufzeit möglich waren. Um vergleichbar genaue Simulationen über klimatologisch relevante Zeitskalen zu ermöglichen, zielte ExaOcean auf eine signifikante Verbesserung des Durchsatzes von ICON-O.

Techniken zur „super-resolution“ d.h. zur nachträglichen Verbesserung der Auflösung von Bilddaten mittels maschinellem Lernen, sind bereits etabliert und weit genutzt. Bisher gab es aber wenig Versuche, vergleichbare Techniken dynamisch im Rahmen von Simulationen einzusetzen. ExaOcean stütze sich hier auf eine Arbeit von Pathak et al. [9], in welcher ein UNet zu Verbesserung der Genauigkeit der Lösung in einer Simulation zwischen Zeitschritten benutzt wird.

Zeitparallele Verfahren sind ein aktives Forschungsfeld, allerdings liegt der Schwerpunkt auf sogenannten „parallel-across-the-steps“ Methoden, welche versuchen, mehrere Zeitschritte simultan zu lösen [10, 11]. Solche Verfahren ermöglichen potentiell großskalige Parallelität in der Zeit, kämpfen aber mit geringen parallelen Effizienzen sowie der Notwendigkeit, aufwändige Grobgittermodelle zu definieren. Daher fokussierte ExaOcean sich auf sogenannte „parallel-across-the-method“ Ansätze. Solche sind beschränkter in der Menge an Prozessoren die genutzt werden können, dafür kommen sie ohne Grobgittermodelle aus, sind einfacher zu implementieren und liefern deutlich bessere parallele Effizienz. Frühe Versuche, parallele Runge-Kutta Methoden zu finden waren wenig erfolgreich, vor allem aufgrund der ungünstigen Stabilitätseigenschaften dieser Verfahren [12]. Einen neuen Zugang hierzu ermöglichte die Paralleliserung von „spectral deferred corrections“ (SDC), ursprünglich eingeführt von Dutt et al. [13], durch die Verwendung diagonaler Vorkonditionierer [14]. In der ursprünglichen Form konvergierten diese parallelen SDC Verfahren allerdings deutlich langsamer als ihre seriellen Gegenstücke und waren daher nur bedingt für den Einsatz in komplexen Simulationscodes wie ICON-O geeignet.

1.3 Planung und Ablauf

Die Realisierung von ExaOcean erfolgte in Form von insgesamt acht miteinander verbundenen Arbeitspaketen, siehe Abbildung 1 (AP8 befasste sich mit der Koordinie-

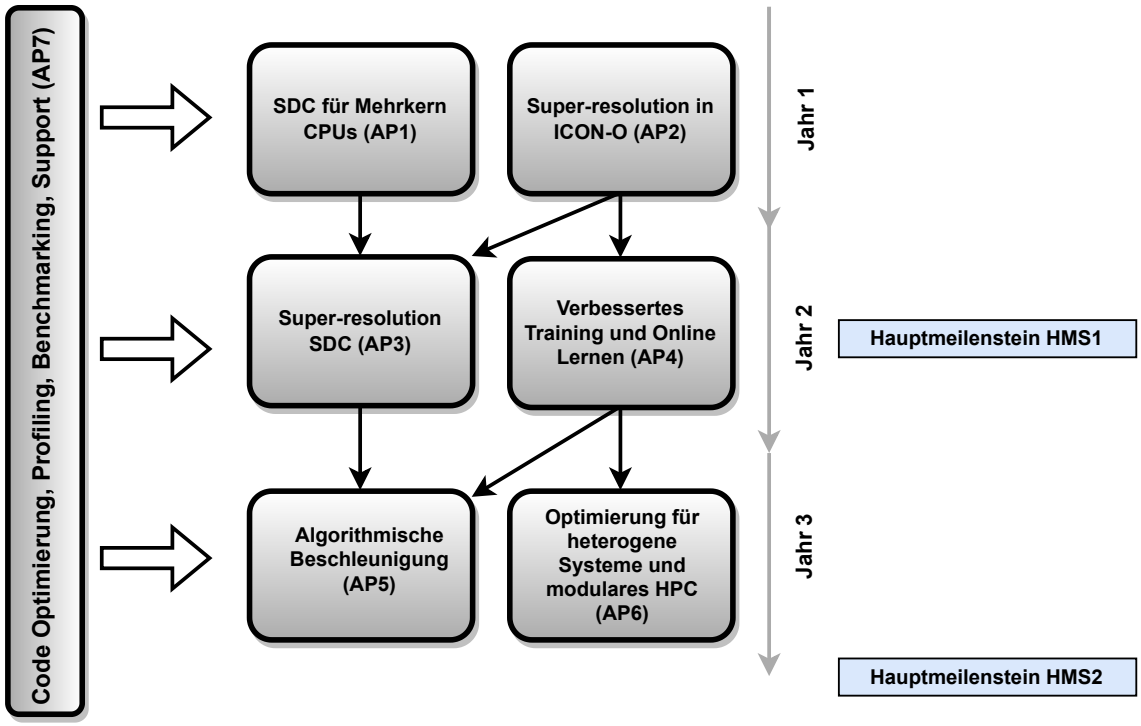
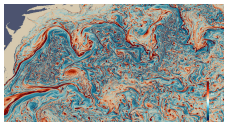


Abb. 1: Abhängigkeiten der Arbeitspakete in ExaOcean.

rung des Projekts und ist in der Grafik nicht dargestellt). Die Arbeitspakete AP1 und AP5 entwickelten und verbesserten das parallele SDC Verfahren. Arbeitspakete AP2 und AP4 lieferten den Ansatz zur „dynamic super-resolution“ (DSR) zur Reduktion der notwendigen Gitterauflösung. AP3 zielte auf die Verbindung beider Ansätze und auf gemeinsame Tests in ICON-O. Im Rahmen von AP6 sollte die Implementierung für heterogene Beschleunigersysteme optimiert und Möglichkeiten ausgelotet werden, die für die DSR notwendigen neuronalen Netze zur Laufzeit im Rahmen von online Training weiter zu verbessern. AP7 wurde vom Jülich Supercomputing Centre geleitet und lieferte durchgehend über die gesamte Projektlaufzeit wertvolle Unterstützung bei der Portierung von Code auf die Systeme in Jülich, beim Benchmarking und Profiling, bei der Einrichtung von Continuous Integration pipelines und ähnlichen Problemstellungen. Im Rahmen von AP8 (nicht in Abbildung 1 dargestellt) fand die Koordinierung des Projekts statt.

Die TUHH übernahm die Leitung der Arbeitspakete AP1 (Mehrkern-SDC für ICON-O), AP3 (Super-resolution SDC), AP5 (Algorithmische Beschleunigung) und AP8 (Koordinierung) in ExaOcean.

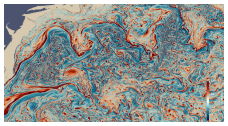


AP1 lieferte die geplante mathematische Beschreibung einer parallelen Variante von SDC und deren Implementierung und Test in ICON-O [15]. Alle drei Teilarbeitspakete wurden wie geplant bearbeitet. In der ursprünglichen Planung war vorgesehen, DSR durch hinzufügen von zu lernenden Korrekturtermen in der Gleichung zu realisieren. Relativ früh im Projekt stellte sich heraus, dass ein Ansatz von Pathat et al. [9] vielversprechender ist, in welchem stattdessen die Lösung zwischen Zeitschritten korrigiert wird. Damit wurde Teilarbeitspaket AP3.c obsolet und die hierfür geplanten Personenmonate wurde in den anderen Teilarbeitspaketen von AP3 verwendet. In Tests für die barotrope Instabilität zeigte das parallele SDC Verfahren deutlich bessere Stabilitätseigenschaften als die vorher in ICON-O genutzte Adams-Bashforth-2 Methode und erlaubte deutlich größere Zeitschritte ohne Stabilitäts- oder Genauigkeitsverlust. AP5 konnte optimierte Koeffizienten für das parallele SDC Verfahren analytisch bestimmen, welche im Gegensatz zu früheren Versionen keinen Verlust an Konvergenzgeschwindigkeit gegenüber der seriellen Variante mehr in Kauf nehmen müssen. Die geplante mathematische Beschreibung von algorithmischen Modifikationen für eine verbessere Konvergenz und dadurch reduzierte Laufzeiten wurde erreicht. Der ursprünglich geplante Zwei-Level Ansatz konnte aufgrund von Zeitmangel nicht mehr verfolgt werden.
Arbeitspaket AP8 beinhaltete Einrichtung und Betrieb notwendiger Kommunikationskanäle (Emailverteiler, Chat Kanäle via Mattermost, gemeinsamer Speicher in der Cloud, etc), die Organisation von zwei Projekttreffen pro Jahr (eines in Präsenz, eines Virtuell), die Präsentation von ExaOcean u.a. bei den HPC-Statustagungen der Gauß-Allianz sowie Management von Risiken und die Koordinierung des Austausches mit dem SCALEXA Projekt IFCES2. Zudem wurde das Projekt unter der Rubrik „Neues aus der Forschung“ auf der Webseite der TUHH und im Infobrief der Gauß-Allianz vorgestellt.

1.4 Zusammenarbeit mit anderen Stellen

Die Partner an der Technischen Universität Hamburg (TUHH), dem Max-Planck Institut für Meteorologie (MPI-M), Deutschen Klimarechenzentrum (DKRZ) und Jülich Supercomputing Centre (JSC) haben im Rahmen von ExaOcean eng zusammengearbeitet.

Die TUHH hat im Rahmen von ExaOcean mit der University of Exeter, dem UK Met Office, der Université Grenoble Alpes und der Universität Genf zusammenge-



arbeitet und gemeinsam publiziert [15–17].

2 Eingehende Darstellung der erzielten Ergebnisse, mit Gegenüberstellung der vorgegebenen Ziele

Das im Projektantrag von ExaOcean definierte Hauptziel war es, *durch eine Kombination von effizienteren Algorithmen, reduzierter räumlicher Auflösung aufgrund der ML-Korrektur, verbesserter Skalierbarkeit und besserer Ausnutzung von Beschleunigern den Durchsatz von ICON-O um mindestens einen Faktor 6 zu verbessern.*

Die hierfür geplanten methodischen Neuerungen wurden erfolgreich entwickelt und getestet [2, 3, 15]. Aufgrund von Beschränkungen in der implementierten hybriden Raum-Zeit-Parallelisierung war es nicht möglich, Testläufe für das volle „sub-mesoscale telescope“ Problem durchzuführen, welches den gesamten Nordatlantik simuliert. Stattdessen wurde als Benchmark eine barokline Instabilität in einem Kanal gewählt. Diese besitzt zwar eine einfachere Geometrie, bildet aber alle auch in der vollen Simulation relevanten physikalischen Prozesse ab.

Das Hauptziel (Hauptmeilenstein HMS2) von ExaOcean, eine Erhöhung des Durchsatzes von ICON-O, konnte erfolgreich verwirklicht werden, auch wenn der angestrebte Faktor 6 nicht erreicht wurde. Aufgrund der verspäteten Indienststellung des JUPITER ExaScale Systems wurden viele Skalierungstests auf dem DKRZ System Levante durchgeführt. Trotzdem gelang zum Ende von ExaOcean eine erfolgreiche Portierung auf JUPITER und erste, wenn auch in der Anzahl an Rechenknoten noch begrenzte, Skalierungstests.

Die TUHH leitete die Arbeitspakete AP1 (Mehrkern SDC für ICON-O), AP3 (super-resolution SDC), AP5 (Algorithmische Beschleunigung) und AP8 (Koordinierung) in ExaOcean. Das parallele SDC Verfahren wurde wie geplant entwickelt und optimiert [2], in ICON-O integriert und Skalierungstest für den Testfall einer barotropen Instabilität durchgeführt [15]. Zudem wurde die Verwendbarkeit des Ansatzes für Simulationen der Atmosphäre untersucht [16] und dessen grundlegenden mathematischen Eigenschaften analysiert [17].

3 Notwendigkeit und Angemessenheit der geleisteten Arbeit

Die in diesem Projekt durchgeführten Arbeiten stellten einen erheblichen Mehraufwand für alle Partner dar, welcher nur mit Hilfe zusätzlicher Mitarbeiterinnen und Mitarbeiter zu bewältigen war. Entsprechend wurde die Förderung zum großen Teil

Kostenart	2022	2023	2024	2025	Summe
Personalkosten	17,551.93	93,007.95	86,213.47	52,292.86	249,066.21
Reisekosten	0.00	1,497.90	3,653,30	0.00	5,151,20
Sonstiges	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Summe	17,551.93	94,505.85	89,866.77	52,292.86	254,217.41

Tab. 1: Wichtigste Positionen des zahlenmäßigen Nachweises (in EUR)

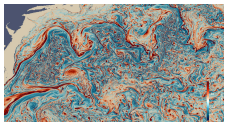
für die Finanzierung von wissenschaftlichen Mitarbeitenden verwendet, welche die vorgestellten Entwicklungen durchgeführt haben. Der Rest der Zuwendung wurde für Reisen von und zu Kooperationspartnern sowie für den Besuch von Konferenzen und Workshops verwendet, um die wissenschaftlichen Resultate und das Projekt selbst vorzustellen.

Die im Rahmen von ExaOcean geleistete Forschung hätte aus der Grundfinanzierung der TUHH heraus nicht finanziert werden können. Um die angestrebten Algorithmen zu entwicklen, war eine detaillierte Kenntnis der numerischen Mathematik, des Hochleistungsrechnen, Erfahrung im parallelen Programmieren und eine Affinität zur Erdsystemmodellierung notwendig. Daher war für die Ausführung der Arbeiten zwingend die mehrjährige Finanzierung einer Postdocstelle notwendig, was nicht aus dem normalen Haushalt der TUHH heraus möglich gewesen wäre.

4 Wichtigste Positionen des zahlenmäßigen Nachweises

Dieser Abschnitt enthält Angaben zu den aufgewendeten Personal- und Reisekosten im Verbundvorhaben ExaOcean.

Für die Durchführung von ExaOcean hat die TUHH ein Fördervolumen in Höhe von 254,217.41€ abgerufen. Die Zuwendung wurde überwiegend zur Finanzierung der wissenschaftlichen Mitarbeiter Dr Jan Philip Freese und Joscha Fregin verwendet. Diese haben insbesondere die wesentlichen Arbeiten für die Arbeitspakete AP1 und AP5 geliefert, gleichzeitig aber auch wichtige Beiträge zur den Arbeiten in AP2 und AP3 geleistet. Zudem wurde die Teilnahme und Präsentation der wissenschaftliche Ergebnisse unter anderem auf der Gauß-Allianz HPC-Statustagung in Karlsruhe, der ISC Supercomputing in Hamburg und der SIAM Parallel Processing in Scientific Computing in Baltimore, USA, sowie der Besuch und Vortrag einer Gastwissenschaftlerin vom Fraunhofer-Institut für Techno- und Wirtschaftsmathematik aus dem Projekt finanziert.



5 Voraussichtlicher Nutzen und Verwertbarkeit im Sinne des fortgeschriebenen Verwertungsplanes

5.1 Wirtschaftliche Anschlussfähigkeit

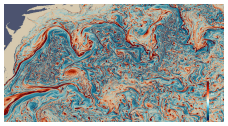
Die TUHH hat keine wirtschaftliche Verwertung geplant.

5.2 Wissenschaftliche-technische Anschlussfähigkeit

High-Performance Computing (HPC) gehört heute in vielen wissenschaftlichen Disziplinen zu den grundlegenden Forschungsmethoden. Systeme wie JUPITER am Jülich Supercomputing Centre erreichen inzwischen Exa-Flop Performanz (mindestens 10^{18} Operationen pro Sekunde). Um die Rechenleistung solcher System aber auch in Anwendungen nutzbar zu machen, sind effiziente mathematische Verfahren notwendig, die den notwendigen Grad in Parallelität bereitstellen können. Eine besondere Herausforderung stellt hierbei dar, dass die Rechenleistung solcher Maschinen vor allem auf dem massiven Einsatz von Grafikkarten (GPUs) beruht, welche durch die typischen gitter-basierten Methoden bei der numerischen Lösung von Differentialgleichungen oft nur unzureichend ausgelastet werden können. Techniken des maschinellen Lernens hingegen eignen sich aufgrund ihrer mathematischen Struktur sehr gut für GPUs. Die in ExaOcean entwickelten Methode zur verbesserten parallelen Skalierbarkeit und Integration von ML-basierten Techniken sind geeignet, eine bessere Ausnutzung von Höchstleistungsrechnern zu ermöglichen. Die für ICON-O demonstrierten entwickelten und getesteten Techniken lassen sich potentiell auf eine große Klasse von auf Differentialgleichungen basierten Modellen erweitern.

Die von ExaOcean gelieferten Ergebnisse werden bereits von der internationalen wissenschaftlichen Community wahrgenommen und die veröffentlichten Arbeiten zitiert [18].

Im Rahmen von ExaOcean war die TUHH vor allem für die Entwicklung eines neuartigen parallelisierbaren Zeitschrittverfahrens zuständig. Diese wurde erfolgreich entwickelt, verbessert und in parallelen Simulationen getestet. Eine detaillierte mathematische Analyse befindet sich in Vorbereitung. Der serielle „Flaschenhals“, welchen klassische Zeitschrittverfahren wie Runge-Kutta Methoden darstellen, betrifft alle Anwendungen, die zeitabhängige Simulationen nutzen. Damit sind ist der entwickelte Algorithmus potentiell sehr breit nutzbar. Die Anwendbarkeit auf Probleme aus dem Bereich Erdmantelphysik und Materialwissenschaften wird derzeit untersucht.



6 Neue projektrelevante FE-Ergebnisse von dritter Stelle

Es sind keine für das Teilprojekt relevanten Ergebnisse von dritter Stelle bekannt.

7 Erfolgte und geplante Veröffentlichungen

Insgesamt konnte die TUHH im Rahmen von ExaOcean vier begutachtete Publikationen veröffentlichen [2, 3, 6, 15]. Eine weitere wurde bei der Zeitschrift *Monthly Weather Review* eingereicht und befindet sich dort in Begutachtung. Ein Preprint des Manuskripts wurde über `www.arxiv.org` veröffentlicht [16]. Zudem befindet sich ein weiteres Manuskript noch in der Fertigstellung und wird vorraussichtlich im ersten Quartal 2026 beim IMA Journal of Numerical Analysis eingereicht [17]. Erste Ergebnisse für massiv parallele Skalierungstests des entwickelten parallelen Verfahrens liegen vor. Wir planen, diese bis Mitte 2026 in Manuskriptform zu bringen und bei einer passenden Zeitschrift oder Konferenz im Bereich Hochleistungsrechnen einzureichen.

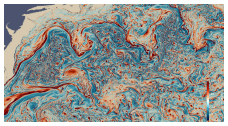
Erfolgte Veröffentlichungen

[1] P. Freese, S. Götschel, T. Lunet, D. Ruprecht, and M. Schreiber, "Parallel performance of shared memory parallel spectral deferred corrections," *The International Journal of High Performance Computing*, 2025, in press. [Online]. Available: http://arxiv.org/abs/2403.20135v1

[2] G. Čaklović, T. Lunet, S. Götschel, and D. Ruprecht, "Improving efficiency of parallel across the method spectral deferred corrections," *SIAM Journal on Scientific Computing*, vol. 47, no. 1, p. A430–A453, 2025. [Online]. Available: https://doi.org/10.1137/24M1649800

[3] M. Witte, F. R. Lapolli, P. Freese, S. Götschel, D. Ruprecht, P. Korn, and C. Kadow, "Dynamic deep learning based super-resolution for the shallow water equations," *Machine Learning: Science and Technology*, vol. 6, no. 1, p. 015060, 2025. [Online]. Available: https://dx.doi.org/10.1088/2632-2153/ada19f

[4] A. Brown, J. Fregin, T. Bendall, T. Melvin, D. Ruprecht, and J. Shipton, "Fast-wave slow-wave spectral deferred correction methods applied to the compressible euler equations," 2025. [Online]. Available: https://arxiv.org/abs/2505.15985



[5] E. Bronasco, J. Fregin, D. Ruprecht, and G. Vilmart, "Spectral deferred corrections in the framework of Runge-Kutta methods," 2026, submission to IMA Journal of Numerical Analysis in Q1/2026.

[6] A. Q. Ibrahim, S. Götschel, and D. Ruprecht, "Parareal with a physics-informed neural network as coarse propagator," in *Euro-Par 2023: Parallel Processing*. Springer Nature Switzerland, 2023, pp. 649–663. [Online]. Available: https://doi.org/10.1007/978-3-031-39698-4_44

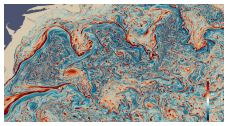
Geplante Veröffentlichungen

[7] E. Bronasco, J. Fregin, D. Ruprecht, and G. Vilmart, "Spectral deferred corrections in the framework of Runge-Kutta methods," 2026, submission to IMA Journal of Numerical Analysis in Q1/2026.

8 Sonstige Literatur

[8] C. Hohenegger, P. Korn, L. Linardakis, R. Redler, R. Schnur, P. Adamidis, J. Bao, S. Bastin, M. Behravesh, M. Bergemann, J. Biercamp, H. Bockelmann, R. Brokopf, N. Brüggemann, L. Casaroli, F. Chegini, G. Datseris, M. Esch, G. George, M. Giorgetta, O. Gutjahr, H. Haak, M. Hanke, T. Ilyina, T. Jahns, J. Jungclaus, M. Kern, D. Klocke, L. Kluft, T. Kölling, L. Kornblueh, S. Kosukhin, C. Kroll, J. Lee, T. Mauritsen, C. Mehlmann, T. Mieslinger, A. K. Naumann, L. Paccini, A. Peinado, D. S. Praturi, D. Putrasahan, S. Rast, T. Riddick, N. Roeber, H. Schmidt, U. Schulzweida, F. Schütte, H. Segura, R. Shevchenko, V. Singh, M. Specht, C. C. Stephan, J.-S. von Storch, R. Vogel, C. Wengel, M. Winkler, F. Ziemen, J. Marotzke, and B. Stevens, "Icon-sapphire: simulating the components of the earth system and their interactions at kilometer and subkilometer scales," *Geoscientific Model Development*, vol. 16, no. 2, p. 779–811, 2023. [Online]. Available: https://gmd.copernicus.org/articles/16/779/2023/

[9] J. Pathak, M. Mustafa, K. Kashinath, E. Motheau, T. Kurth, and M. Day, "Using machine learning to augment coarse-grid computational fluid dynamics simulations," 2020. [Online]. Available: https://arxiv.org/abs/2010.00072



[10] J.-L. Lions, Y. Maday, and G. Turinici, “A "pararealïn time discretization of PDE’s,” *Comptes Rendus de l’Académie des Sciences - Series I - Mathematics*, vol. 332, pp. 661–668, 2001. [Online]. Available: http://dx.doi.org/10.1016/S0764-4442(00)01793-6

[11] M. J. Gander and T. Lunet, *Time Parallel Time Integration*, ser. SIAM Collection. SIAM, 2024. [Online]. Available: https://epubs.siam.org/doi/book/10.1137/1.9781611978025

[12] A. Iserles and S. Nørsett, “On the theory of parallel runge—kutta methods,” *IMA Journal of numerical Analysis*, vol. 10, no. 4, pp. 463–488, 1990.

[13] A. Dutt, L. Greengard, and V. Rokhlin, “Spectral deferred correction methods for ordinary differential equations,” *BIT Numerical Mathematics*, vol. 40, no. 2, pp. 241–266, 2000.

[14] R. Speck, “Parallelizing spectral deferred corrections across the method,” *Computing and Visualization in Science*, 2018. [Online]. Available: https://doi.org/10.1007/s00791-018-0298-x

[15] P. Freese, S. Götschel, T. Lunet, D. Ruprecht, and M. Schreiber, “Parallel performance of shared memory parallel spectral deferred corrections,” *The International Journal of High Performance Computing*, 2025, in press. [Online]. Available: http://arxiv.org/abs/2403.20135v1

[16] A. Brown, J. Fregin, T. Bendall, T. Melvin, D. Ruprecht, and J. Shipton, “Fast-wave slow-wave spectral deferred correction methods applied to the compressible euler equations,” 2025. [Online]. Available: https://arxiv.org/abs/2505.15985

[17] E. Bronasco, J. Fregin, D. Ruprecht, and G. Vilmart, “Spectral deferred corrections in the framework of Runge-Kutta methods,” 2026, submission to IMA Journal of Numerical Analysis in Q1/2026.

[18] J. Li, J. Steppeler, P. Gan, F. Fang, and L. Li, “Numerical weather prediction in the time of exaflop computers,” *Bulletin of the American Meteorological Society*, vol. 106, no. 6, p. E1087–E1097, 2025. [Online]. Available: https://journals.ametsoc.org/view/journals/bams/106/6/BAMS-D-25-0085.1.xml