

### 3. Zusammenfassung

Die Untersuchung der Korrosionsbeständigkeit von keramischen Elektroden auf  $\text{SnO}_2$ -Basis hat ergeben, daß diese zum Erschmelzen von Bleigläsern nur bei niedrigen Temperaturen verwendet werden können. Bei Temperaturen über  $1400^\circ\text{C}$  ist die Lebensdauer der Elektroden zu kurz, und daher ist die Anwendung unwirtschaftlich.

Da keramische Elektroden auf  $\text{SnO}_2$ -Basis wesentlich stärker als z. B. Molybdänelektroden korrodiert werden, müssen sie einen wesentlich größeren Durchmesser aufweisen. Daraus geht hervor, daß es jetzt noch nicht möglich ist, Molybdänelektroden ganz durch keramische Elektroden auf  $\text{SnO}_2$ -Basis zu ersetzen.

(50422)

DK 666.1.031.5:621.3.036.6:537.212:666.1.031.13:536.12:621.3.026

## Über die Verteilung der elektrischen Energie zwischen den Elektroden und die Beeinflussung des Temperaturfeldes durch die thermischen Eigenschaften der Glasschmelze

Von JOSEF VACH und VÁCLAV DUŠÁNEK, Hradec Králové (ČSSR)

(Mitteilung aus dem Staatlichen Glasforschungsinstitut in Hradec Králové)

(Eingegangen am 11. Juli 1969)

Es wird das elektrische Feld im Schmelzbereich eines elektrisch beheizten Glaswannenofens mit sechs vertikal angeordneten Elektroden berechnet und analysiert. Ferner wird der Gradient des elektrischen Feldes für zwei verschiedene Elektrodendurchmesser ermittelt und der Einfluß des Elektrodenabstandes auf die Schmelzleistung untersucht. An Hand von Messungen der Temperaturverteilung im Schmelzbereich einer elektrisch beheizten Modellwanne wird die Wirkung des Strahlungsanteiles der Wärmeleitfähigkeit für drei Glasarten besprochen.

Im Staatlichen Glasforschungsinstitut in Hradec Králové wurde versucht, die Verteilung der elektrischen Energie in der Schmelzwanne unter vereinfachenden Voraussetzungen zu berechnen. Die Berechnung der Temperaturverteilung und der dem Schmelzbad von stabförmigen Elektroden zugeführten elektrischen Energie bereitet einige Schwierigkeiten, da die physikalischen Eigenschaften der Versuchsschmelze oft nicht genau bekannt sind.

### 1. Theoretische Analyse

Allgemein kann man sagen, daß die spezifische elektrische Energie, bezogen auf das Einheitsvolumen eines isotropen leitenden Mediums, gegeben ist durch die Beziehung

$$N_m = \gamma |\text{grad } V|^2, \quad (1)$$

mit  $N_m$  = spezifische elektrische Leistung in  $\text{W}\cdot\text{cm}^{-3}$ ,  $\text{grad } V$  = elektrischer Feldgradient in  $\text{V}\cdot\text{cm}^{-1}$  und  $\gamma$  = spezifische elektrische Leitfähigkeit in  $\text{A}\cdot\text{V}^{-1}\cdot\text{cm}^{-1}$ . Bei einem Medium mit konstanter elektrischer Leitfähigkeit stellt die Funktion  $\text{grad } V$  einen entscheidenden Parameter zur Bestimmung des elektrischen Potentialfeldes dar.

Die Funktion  $\text{grad } V$  im zweidimensionalen Medium ist allgemein durch die Beziehung

$$\text{grad } V = \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \quad (2)$$

und ihr absoluter Wert durch die Beziehung

$$|\text{grad } V| = \sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2} \quad (3)$$

definiert.

Zur Bestimmung der Größe von  $\text{grad } V$  ist es nötig, den Verlauf des Potentials  $V$  zu untersuchen. In einem leitenden zweidimensionalen, homogenen und isotropen Medium mit konstanter elektrischer Leitfähigkeit gilt für einen quellenfreien Fall die Laplace-Gleichung

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0, \quad (4)$$

mit  $V$  = elektrisches Potential in  $\text{V}$  und  $x, y, z$  = unabhängig veränderliche Koordinaten.

Damit die Gleichung (4) eine eindeutige Lösung im betrachteten Bereich hat, ist es nötig, Randbedingungen festzulegen. Als Randbedingungen werden gestellt: 1. Wert von  $V$  an den Grenzen des untersuchten Bereiches, 2. Wert der Ableitung von  $V$  nach der Normalen an den Grenzen des untersuchten Bereichs und 3. bestimmte Funktion von  $V$  bzw. deren Ableitung an den Grenzen des untersuchten Bereichs.

In der Literatur werden z. B. in [1] eine Reihe von Lösungsmethoden partieller Differentialgleichungen der Art wie Gleichung (4) angegeben. Ursprünglich war die Lösung von Gleichung (4) durch Modelluntersuchungen an einem elektrischen Feld in einer flachen elektrisch beheizten Modellwanne untersucht worden. Numerische Lösungen von Gleichung (4) lassen sich mit Hilfe des Netzverfahrens erhalten, mit dem genauere Lösungen als mit Modellversuchen gewonnen werden. Mit diesem Verfahren kann Gleichung (4) mit den angegebenen Randbedingungen verhältnismäßig leicht gelöst werden.

Nach dem von PAVLOV [2] beschriebenen Netzverfahren wird der zu untersuchende Bereich durch ein Netz von Geraden, die parallel zu den Koordinatenachsen im Abstand  $\Delta x$  und  $\Delta y$  gelegt werden, unterteilt. Das elektrische Potential  $V$  wird dann in den Schnittpunkten der Geraden bestimmt.

In Gleichung (4) werden die partiellen Ableitungen durch die Enddifferenzen ersetzt. Nach Umformungen ergibt sich dann

$$V_{i-1,k} + V_{i+1,k} + V_{i,k-1} + V_{i,k+1} - 4V_{i,k} = 0, \quad (5)$$

wobei  $i, k$  die Koordinaten der Punkte mit dem Potential  $V$  sind. Ähnlich erhält man nach Ersetzen der partiellen Ableitungen in Gleichung (3) durch Enddifferenzen eine Beziehung, mit der  $\text{grad } V$  in den Schnittpunkten der Geraden bestimmt werden kann. Nach Einsetzen und Umformen ist

$$|\text{grad } V_{i,k}| = \frac{1}{2h} \sqrt{(V_{i+1,k} - V_{i-1,k})^2 + (V_{i,k+1} - V_{i,k-1})^2} \quad (6)$$

mit  $h = \Delta x = \Delta y =$  ein Netzschritt.

Unterteilt man den zu untersuchenden Bereich durch  $n$  Schnittpunkte mit den Koordinaten  $i, k$ , so erhält man ein System linearer algebraischer Gleichungen mit  $n$  Unbekannten. Eine Übersicht über Lösungsmethoden linearer algebraischer Gleichungen ist in [3] angegeben.

Das Gleichungssystem (5) wird nach einem einfachen Iterationsverfahren gelöst, indem  $V$  in den einzelnen Schnittpunkten abgeschätzt und in das Gleichungssystem eingesetzt wird (1. Näherung). Den erhaltenen Wert setzt man dann wieder in das Gleichungssystem ein und berechnet einen neuen Wert für  $V$  (2. Näherung). Dieses Verfahren wird so lange fortgesetzt, bis die erhaltenen Werte für  $V$  von zwei aufeinanderfolgenden Näherungen weniger voneinander abweichen, als es die verlangte Genauigkeit der Lösung erlaubt, d. h. das Iterationsverfahren ist dann beendet, wenn

$$\varepsilon \leq |V_{i,k}^{(n)} - V_{i,k}^{(n+1)}|, \quad (7)$$

wobei  $\varepsilon$  die verlangte Genauigkeit der Lösung ist.

### 2. Berechnung von grad V im Schmelzbereich

Die Berechnung von grad V als einer der Hauptparameter für die Bestimmung des Wärmefeldes wurde für den Schmelzbereich eines elektrisch beheizten Wannens mit einer Schmelzleistung von 4 t/24 h durchgeführt. Bild 1 zeigt die Schmelzwanne, die von sechs, im Sechseck angeordneten Elektroden beheizt wird. Die einzelnen Elektrodenpaare sind an die Sekundärwicklung von Heiztransformatoren angeschlossen, deren Mittelanzapfungen zusammenschaltet sind. Aus technologischen Gründen wird die elektrische Energie ungleichmäßig auf die verschiedenen Elektrodenpaare verteilt, die meiste Energie wird den Elektroden am Durchlaß zugeführt.

Da die Länge der Elektroden größer als ihr Durchmesser war, wurde der Verlauf von grad V in zwei Dimensionen untersucht. Für die Berechnung wurde eine konstante spezifische Leitfähigkeit der Schmelze, nichtleitende Wände und unendlich große Leitfähigkeit der Elektroden angenommen. Durch diese drei Bedingungen werden die in 1. beschriebenen Randbedingungen festgelegt, d. h. die Elektrodenoberflächen stellen äquipotentiale Flächen mit bekanntem Potential dar, 2. da die Wände der Schmelzwanne als nicht leitend angenommen werden, verlaufen die Linien gleichen Potentials senkrecht zur Grenzfläche, dies wird ausgedrückt durch die Ableitung der Potentialfunktion nach der Normalen, die hier den Wert null hat.

In Bild 2 ist der Grundriß der Schmelzwanne mit Elektroden (Durchmesser 50 und 100 mm) und NetZRaster (Abstand  $h = 100$  mm) dargestellt. Für jeden Schnittpunkt des untersuchten Bereichs wurden die Potentialfunktion  $V$  und grad V berechnet.

Da die Elektroden nicht gleichmäßig belastet wurden und für die Berechnungen „Gleichstromwerte“ der Potentialfunktion verwendet wurden, wurden die Verhältnisse der Elektrodenpotentiale wie folgt gewählt:

$$V_{E1} : V_{E2} : V_{E3} : V_{E4} : V_{E5} : V_{E6} = 1 : 3 : 1,5 : 3,5 : 1,75 : 3,25.$$

Die Lösungen der Gleichungen (5) und (6) wurden mit einem kleinen automatischen Digitalrechner ermittelt. Die durch Gleichung (7) gegebene Genauigkeit der Lösungen wurde für Werte der Potentialfunktion  $V$

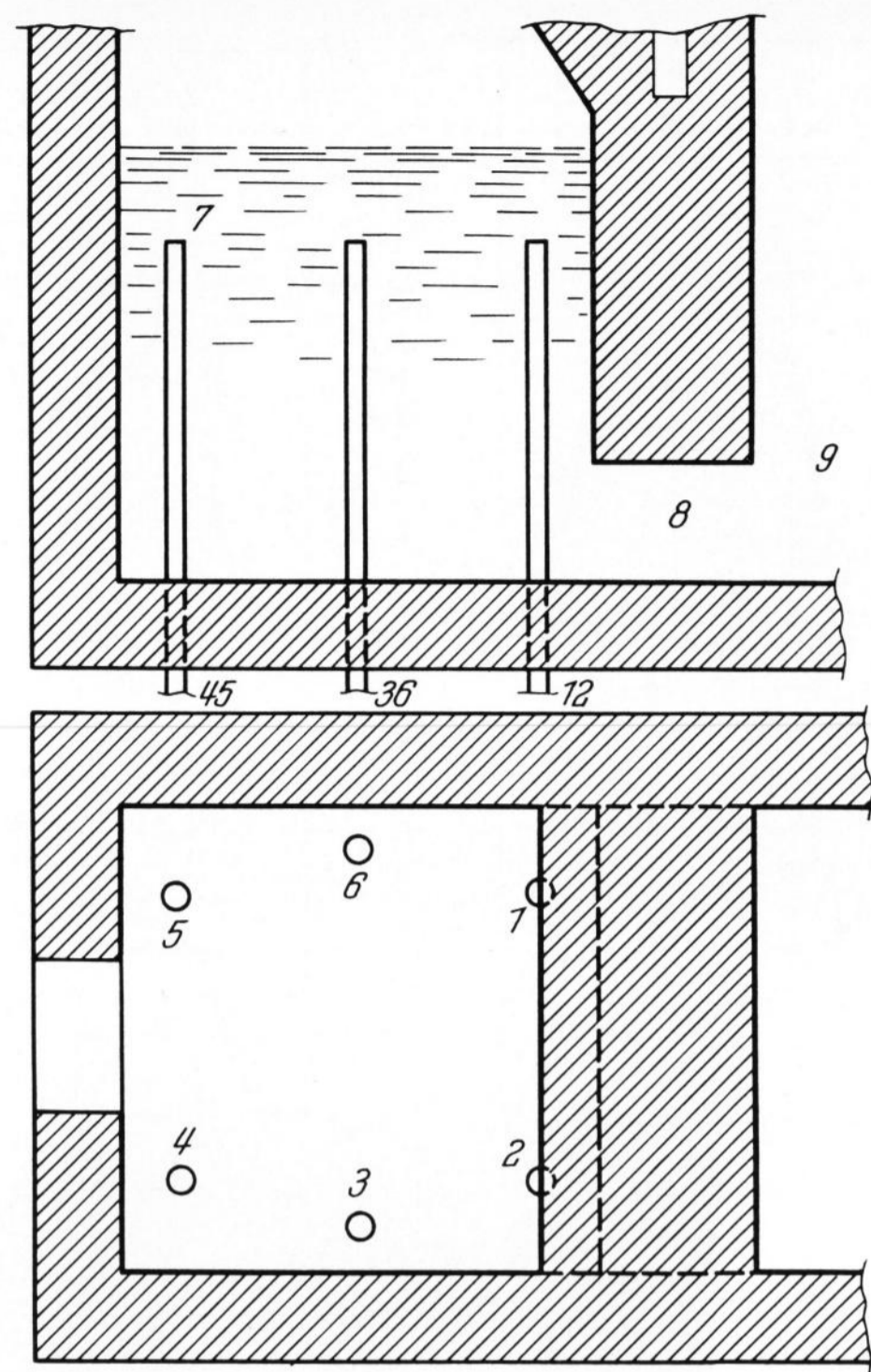


Bild 1. Schmelzwanne der im Staatlichen Glasforschungsinstitut in Hradec Králové entwickelten elektrisch beheizten Wanne.

im Intervall von 100 bis 325 auf  $\varepsilon = 0,005$  genau bestimmt.

### 3. Ergebnisse

Einige Ergebnisse von grad V sind in den Bildern 3 bis 5 zusammengestellt, die dicker ausgezogenen Kurven beziehen sich auf Elektroden mit einem Durchmesser von 50 mm und die dünner ausgezogenen Kurven auf Elektroden mit 100 mm Durchmesser. Bild 3 zeigt den Verlauf von grad V im Bereich der Elektroden E 1 und E 2, die im kleinsten Abstand vom Durchlaß angeordnet sind. grad V erreicht für  $k = 2$  ein Maximum, was der kürzesten Verbindung der Oberflächen von E 1 und E 2 entspricht. Minimum und Maximum von grad V ver-

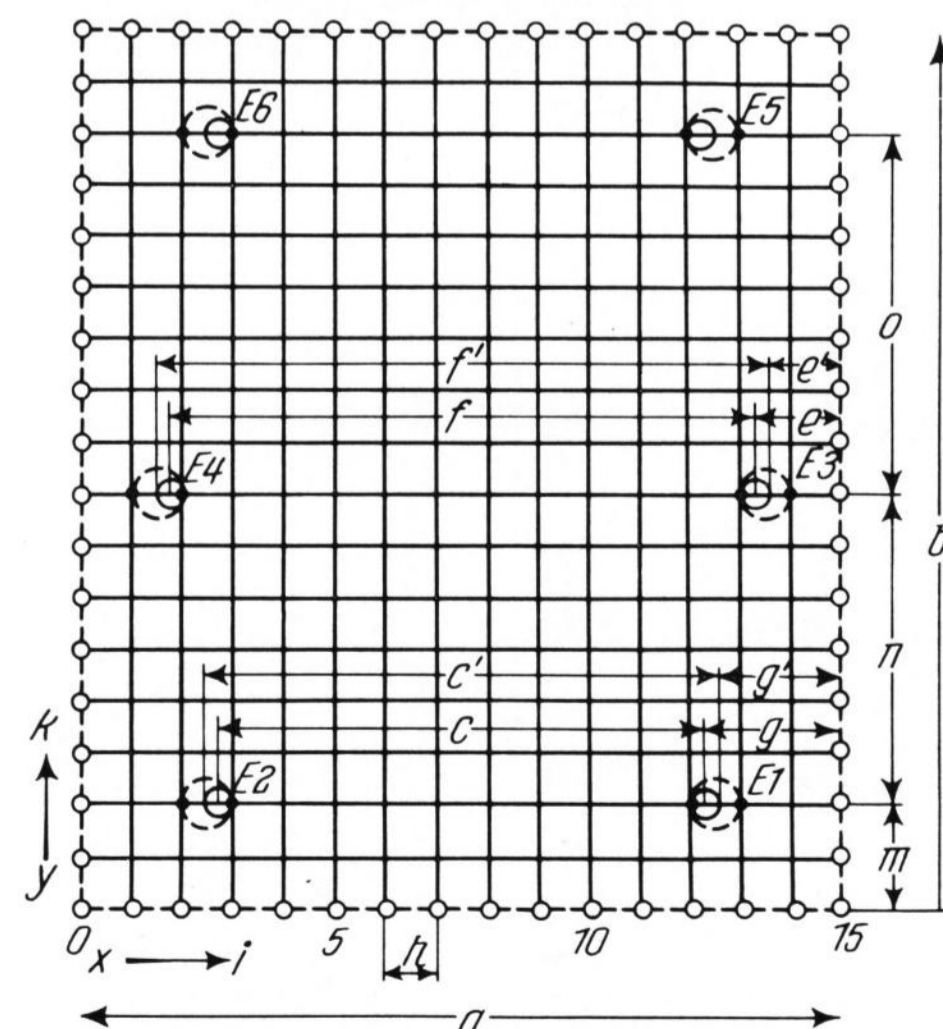


Bild 2. Grundriß der Schmelzwanne mit eingezeichneten Elektroden und NetZRaster.

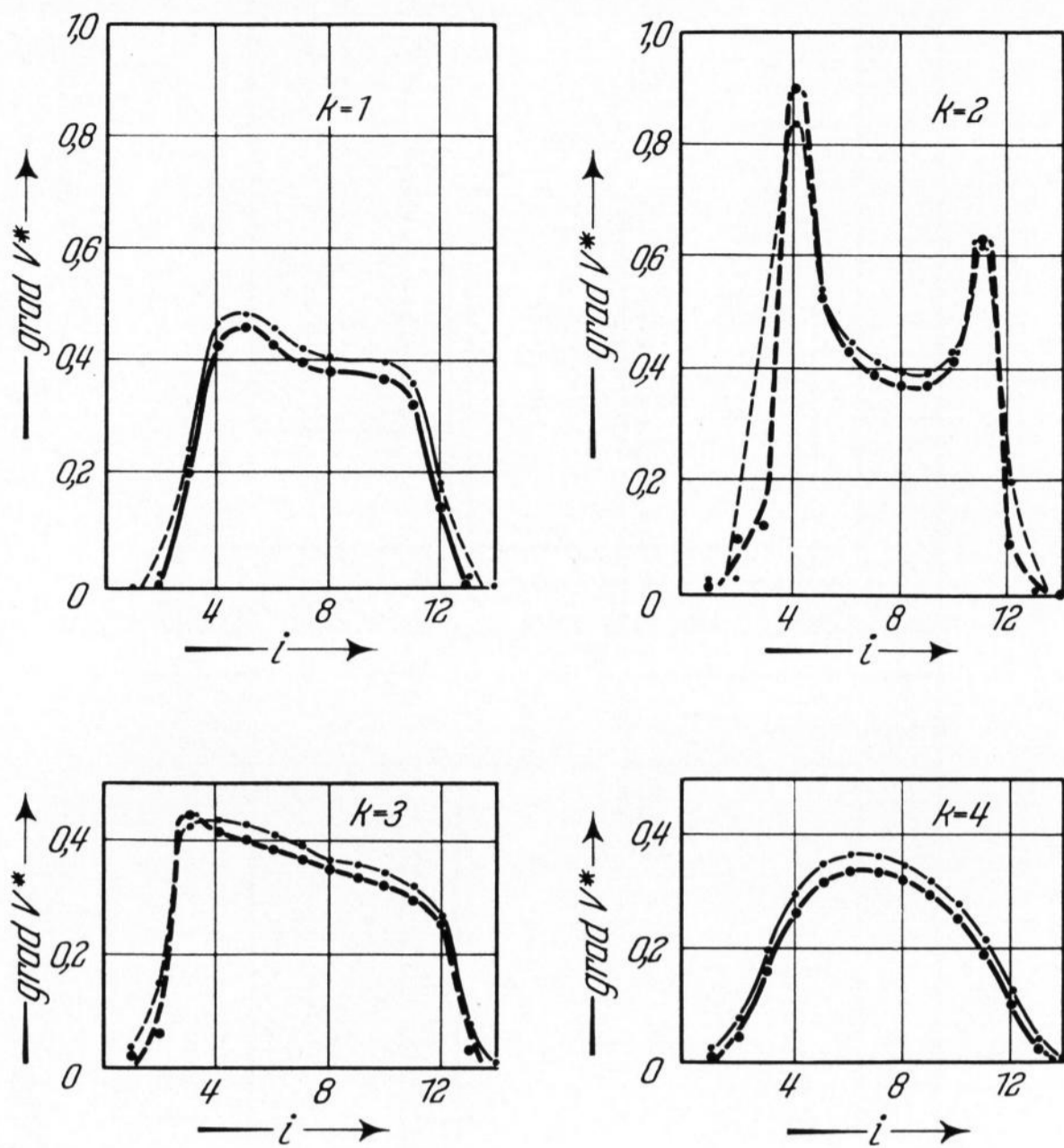


Bild 3. Verlauf von grad V im Bereich der Elektroden vor dem Durchlaß.

halten sich wie 1:2,43 bei Elektroden mit 50 mm Durchmesser, was einem Verhältnis der spezifischen Energie von 1:5,91 entspricht. Für Elektroden mit 100 mm Durchmesser verhalten sich Minimum und Maximum wie 1:2,12  $\wedge$  1:4,52.

In Bild 4 ist der Verlauf von grad V für  $k = 9$  dargestellt, d. h. der Feldgradient zwischen den beiden mittleren Elektroden. Das Verhältnis von Minimum und Maximum für Elektroden mit einem Durchmesser von 50 mm ist hier 1:4,68, was einer spezifischen Energie von 1:21,94 entspricht; bei Elektroden mit einem Durchmesser von 100 mm betragen diese Verhältnisse 1:4,04 und 1:16,39.

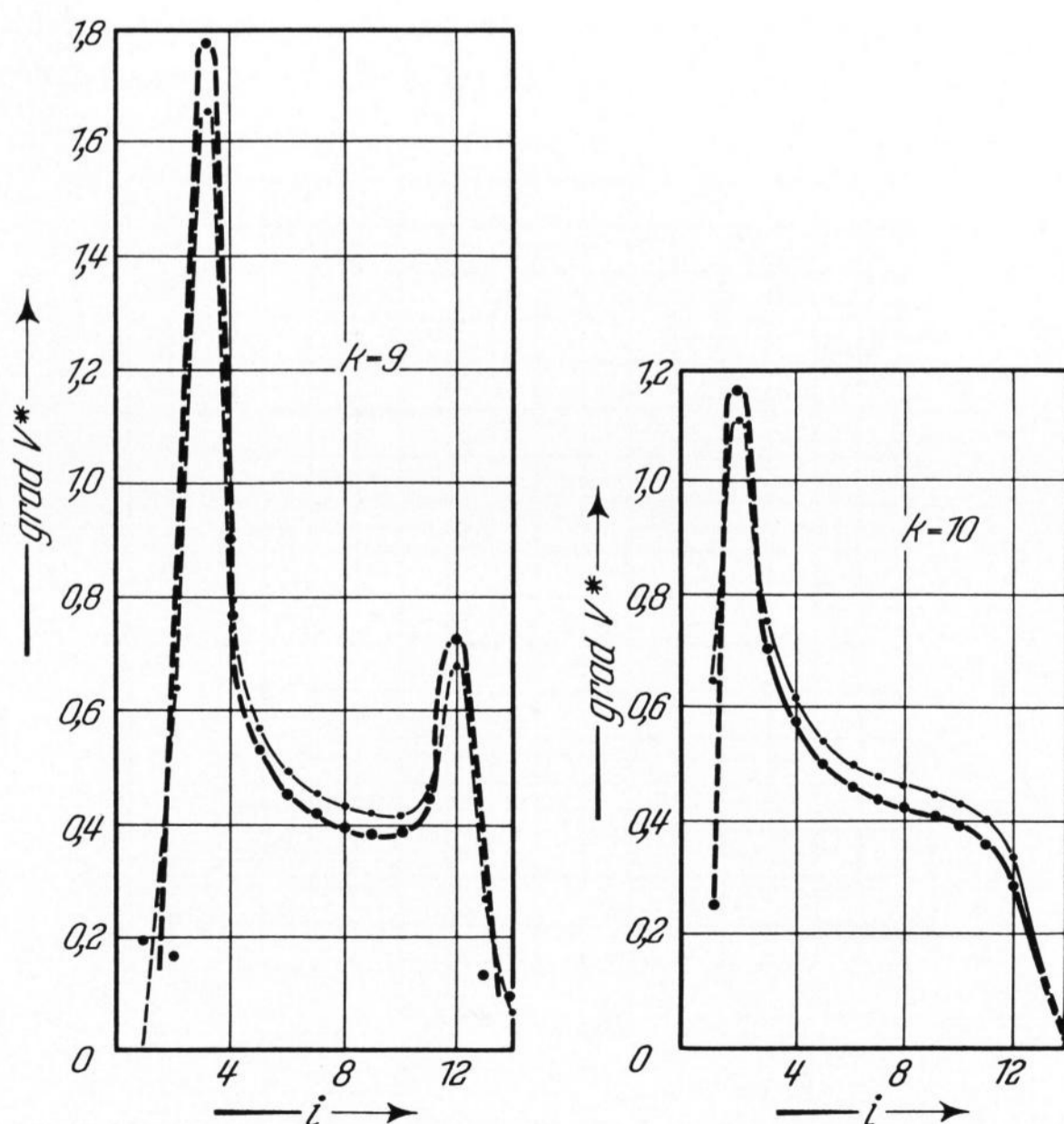


Bild 4. Verlauf von grad V in der Mitte der Schmelzwanne.

In Bild 5 ist der Verlauf von grad V an den am meisten belasteten Elektroden (am weitesten vom Durchlaß entfernt) zu sehen. Hier ist das Verhältnis von Minimum zu Maximum bei Elektroden mit 50 mm Durchmesser 1:4 (spezifische Energie 1:16) und für Elektroden mit 100 mm Durchmesser 1:3,59 (1:12,9). Daraus geht hervor, daß die ungünstigsten Verhältnisse der Energieverteilung am mittleren Elektrodenpaar auftreten, auch wenn deren Gesamtbelastung kleiner ist als bei den Elektroden nahe am Durchlaß. Dieser Tatbestand läßt sich wahrscheinlich durch den Einfluß der Elektrodenabstände von den Wänden erklären.

Die Ergebnisse zeigen, daß bei der gegebenen Elektrodenanordnung eine Vergrößerung des Elektroden-durchmessers auf 100 mm — wenn die Elektroden mit 50 mm nicht überlastet werden — unwirtschaftlich ist. Es wird kaum ein Ausgleich des elektrischen Feldgradienten erzielt.

Gewisse Ungleichmäßigkeiten von grad V ergeben sich an den Wänden der Schmelzwanne und an den Elektroden, was aus Bild 5 entnommen werden kann (siehe  $i = 2$  bzw.  $i = 12$ ,  $k = 15$ ).

Bei einer ausführlichen Untersuchung dieser Gebiete (durch Verfeinerung des Berechnungsnetzes in der Nähe der Wand und der Elektroden), stellt sich infolge der Nichtleitung der Grenzfläche eine große Biegung der Stromlinien heraus, dadurch kommt es zu einem lokalen Abfall von grad V bzw. der spezifischen elektrischen Energie. Es ist deshalb notwendig, bei der Anordnung der Elektroden in der Schmelzwanne diese Tatsache zu berücksichtigen.

Außerdem wurde der Einfluß des Elektrodenabstandes zwischen E 1 und E 2 (Durchmesser 50 mm) auf

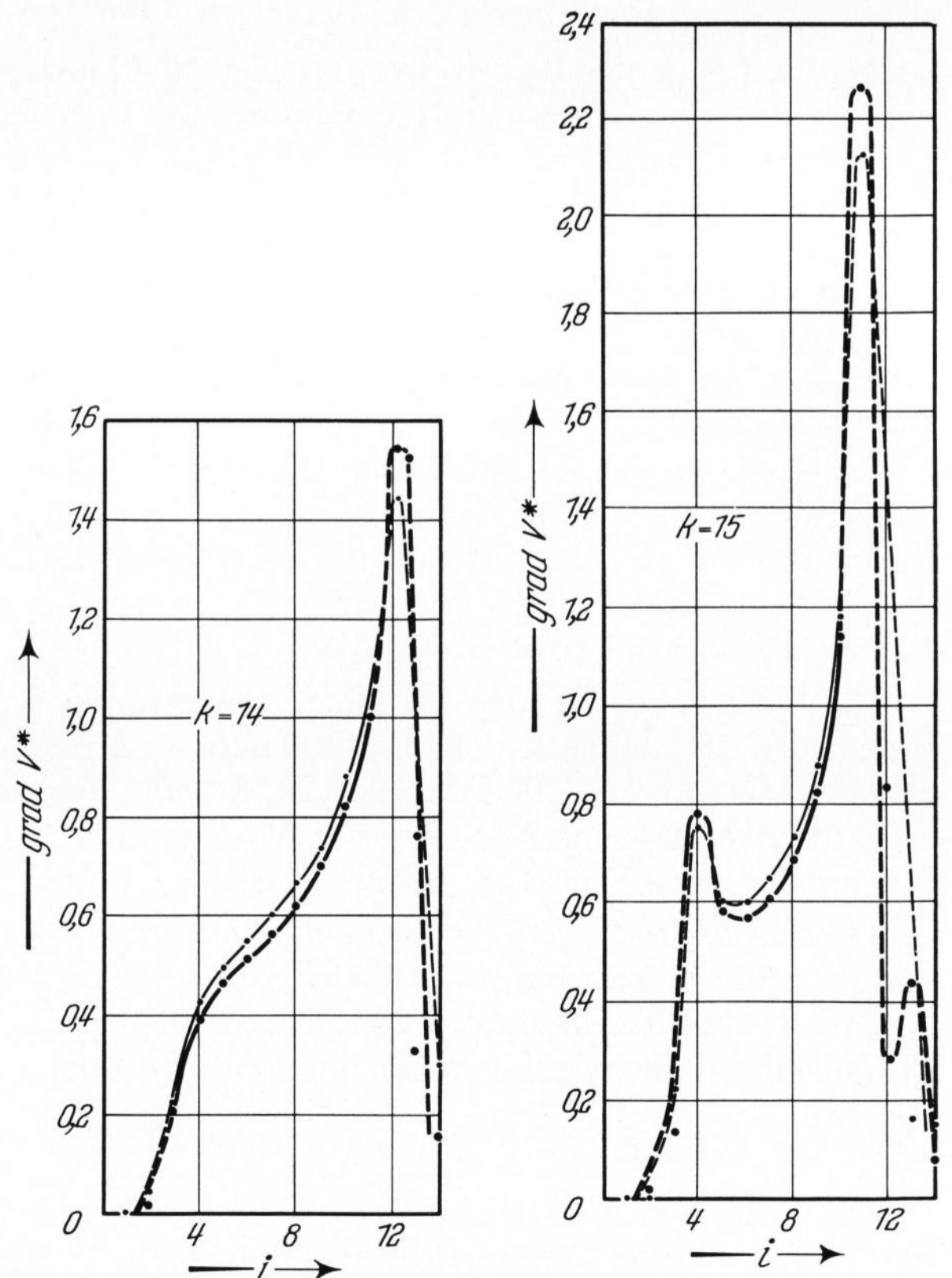


Bild 5. Verlauf von grad V zwischen den am weitesten vom Durchlaß entfernten Elektroden.

Tabelle 1. Effektive Wärmeleit Zahlen der untersuchten Gläser in cal cm<sup>-1</sup>s<sup>-1</sup>grd<sup>-1</sup>

Temperatur in °C	Natron-Kalk-Glas	Rosal	Greenal
1150	—	0,0334	0,0179
1250	0,153	0,0417	0,0221
1350	—	0,0508	0,0245
1450	0,243	0,0621	0,0285

grad V in der Mitte zwischen den Elektroden und in deren „Schatten“ untersucht. Verringert man diesen Abstand von ursprünglich 1100 mm auf 900 mm (um 2 h, siehe (Bild 2), erhöht sich grad V in der Mitte zwischen den Elektroden (i = 8, k = 2) um 25%, im Schatten (i = 1, k = 2) verringert sich grad V um 60%. Dieser beträchtliche Abfall der spezifischen elektrischen Energie ist aus betrieblichen Gründen natürlich unerwünscht.

4. Messung der Temperaturfelder im Schmelzbereich

In der elektrisch beheizten Versuchswanne nach Bild 1 wurde die Temperaturverteilung in etwa ein Viertel des Schmelzwannenvolumens berechnet, und zwar an drei verschiedenen Schmelzen: Natron-Kalk-Glas, Rosal und Greenal, die sich durch ihre Absorption im UR-Bereich und dadurch auch in ihrer effektiven Wärmeleitfähigkeit unterscheiden. Die effektive Wärmeleitfähigkeit wurde im Bereich von 1150 bis 1450 °C berechnet, die Ergebnisse sind in Tabelle 1 zusammengestellt. Zur Berechnung wurde die von CZERNY, GENZEL und HEILMANN [4] abgeleitete Beziehung

$$\lambda_z = \frac{16}{3} \sigma n^2 F \cdot T_m^3$$

verwendet, wobei  $\sigma$  = Boltzmann-Konstante (1,354 · 10<sup>-12</sup> cal cm<sup>-2</sup> s grd<sup>4</sup>), n = Brechungsindex, F = mittlere freie Strahlungsweglänge im Glas in cm, T<sub>m</sub> = mittlere absolute Temperatur des Glases in °K. Außerdem wurde der Ansatz

$$\lambda_{ef} = \lambda_v + \lambda_z$$

benutzt, mit  $\lambda_{ef}$  = effektive Wärmeleitfähigkeit in cal · cm<sup>-1</sup>s<sup>-1</sup>grd<sup>-1</sup>,  $\lambda_v$  = echte Wärmeleitfähigkeit und  $\lambda_z$  = Wärmestrahlung. Für alle Gläser wurde die echte Wärmeleitfähigkeit zu  $\lambda_v = 0,0022$  cal · cm<sup>-1</sup>s<sup>-1</sup>grd<sup>-1</sup> angenommen.

Aus der Tabelle 1 ist abzulesen, daß

$$\lambda_{efGreenal} : \lambda_{efRosal} : \lambda_{efNatron-Kalk-Glas} = 1 : 4 : 8$$

ist. Wie die an verschiedenen Schmelzen gewonnenen Ergebnisse zeigen, wird der Verlauf des Temperaturgradienten bei gleicher Elektrodenanordnung und gleicher Verteilung der elektrischen Energie stark durch die effektive Wärmeleitfähigkeit der Gläser beeinflusst.

Bild 6 zeigt einen senkrechten Schnitt durch den Schmelzbereich im Abstand von 200 mm vor dem Durchlaß. Es ist zu erkennen, daß beim Natron-Kalk-Glas der Einfluß der effektiven Wärmeleitfähigkeit (besonders des Strahlungsanteils  $\lambda_z$ ) sehr wesentlich ist und daß dadurch Ungleichmäßigkeiten des elektrischen Feldes überdeckt werden. Die Temperatur der Glasschmelze verläuft in diesem Gebiet fast homogen. Bei diesen Messungen wurde allen Elektronenpaaren dieselbe Energie zugeführt.

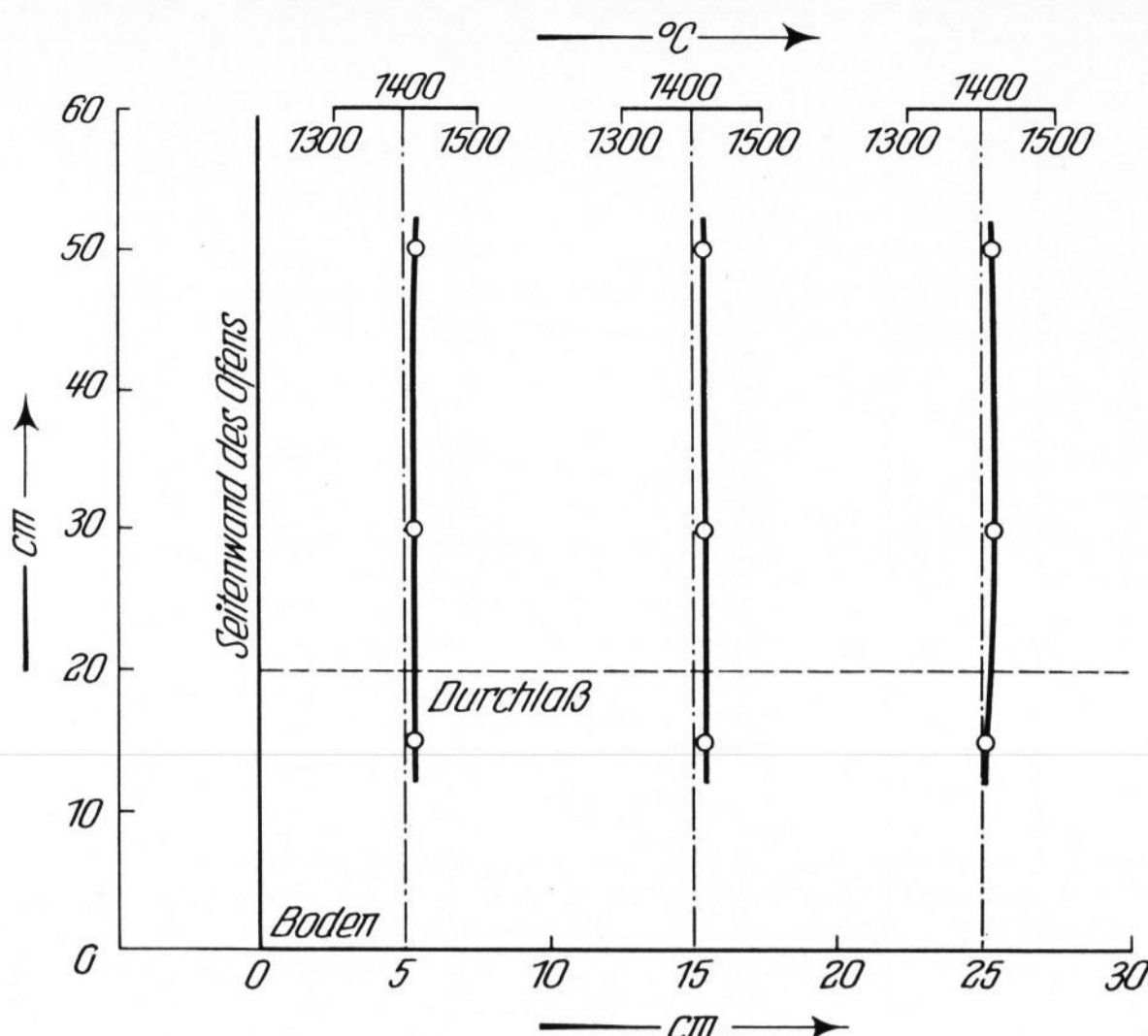


Bild 6. Verlauf des Temperaturgradienten, 20 cm vom Durchlaß entfernt in der Natron-Kalk-Glasschmelze.

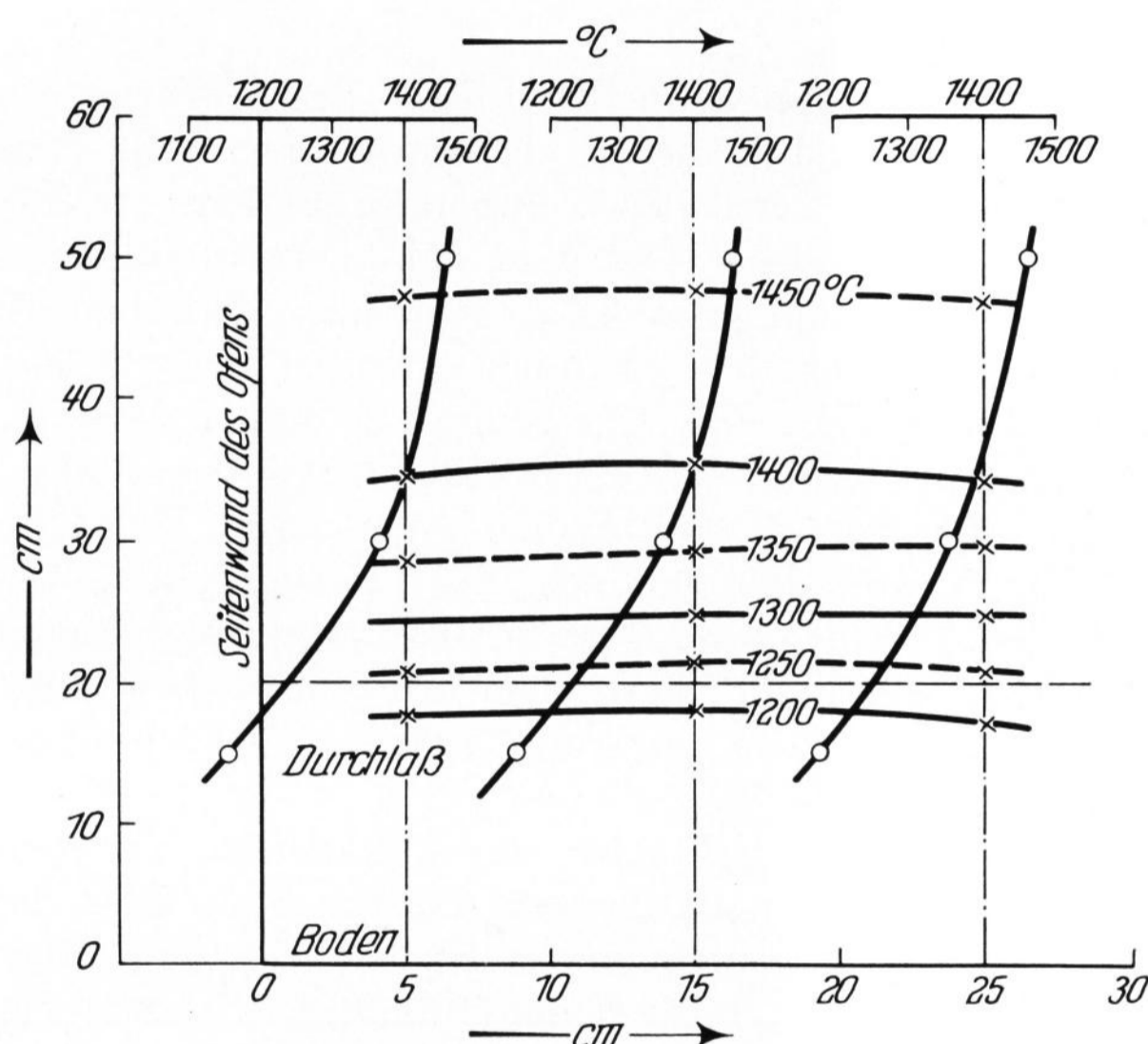


Bild 7. Temperaturgradient, 20 cm vom Durchlaß entfernt, in der Rosal-Glasschmelze.

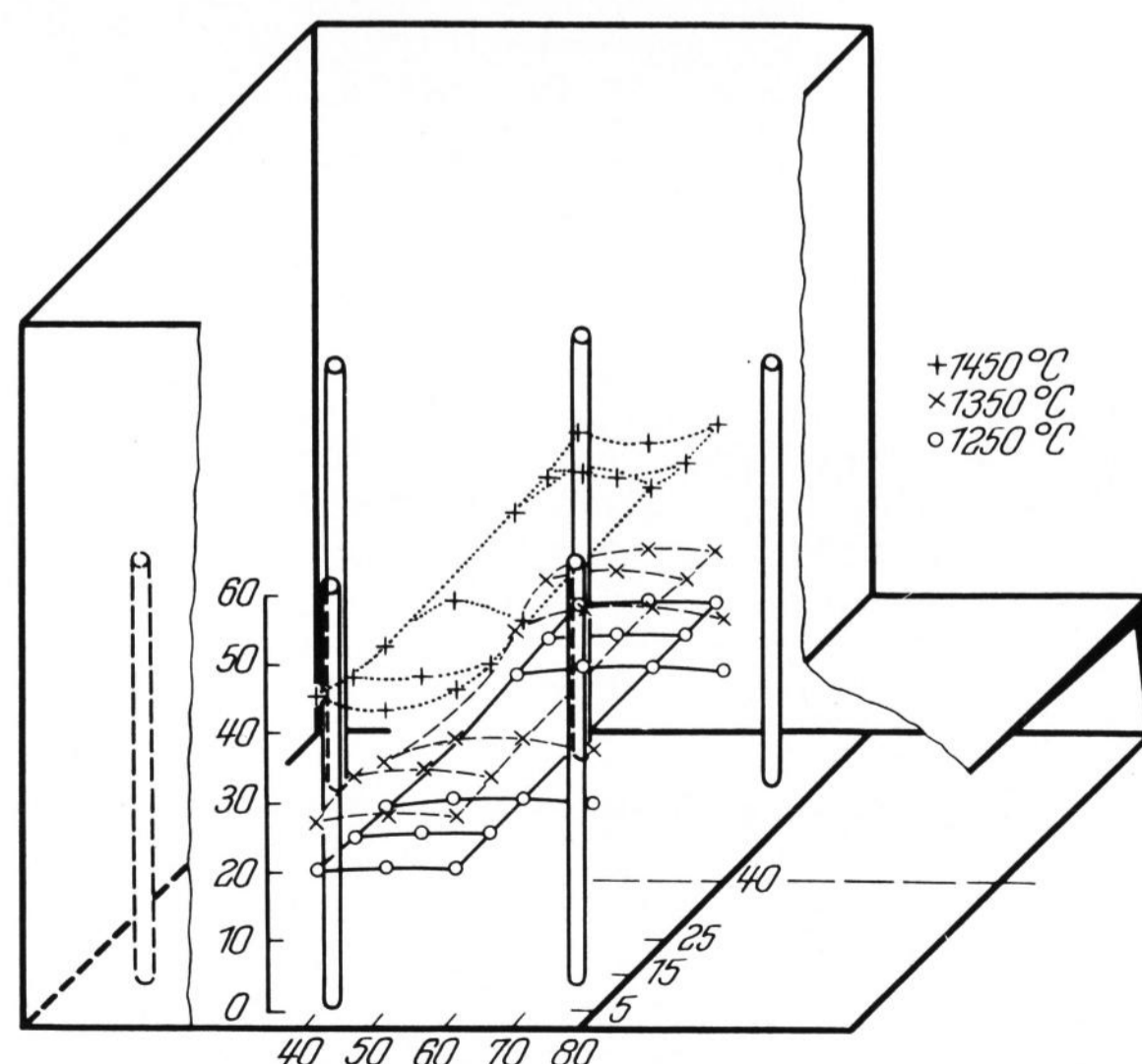


Bild 8. Temperaturverlauf in der Schmelzwanne in der Rosal-Glasschmelze.

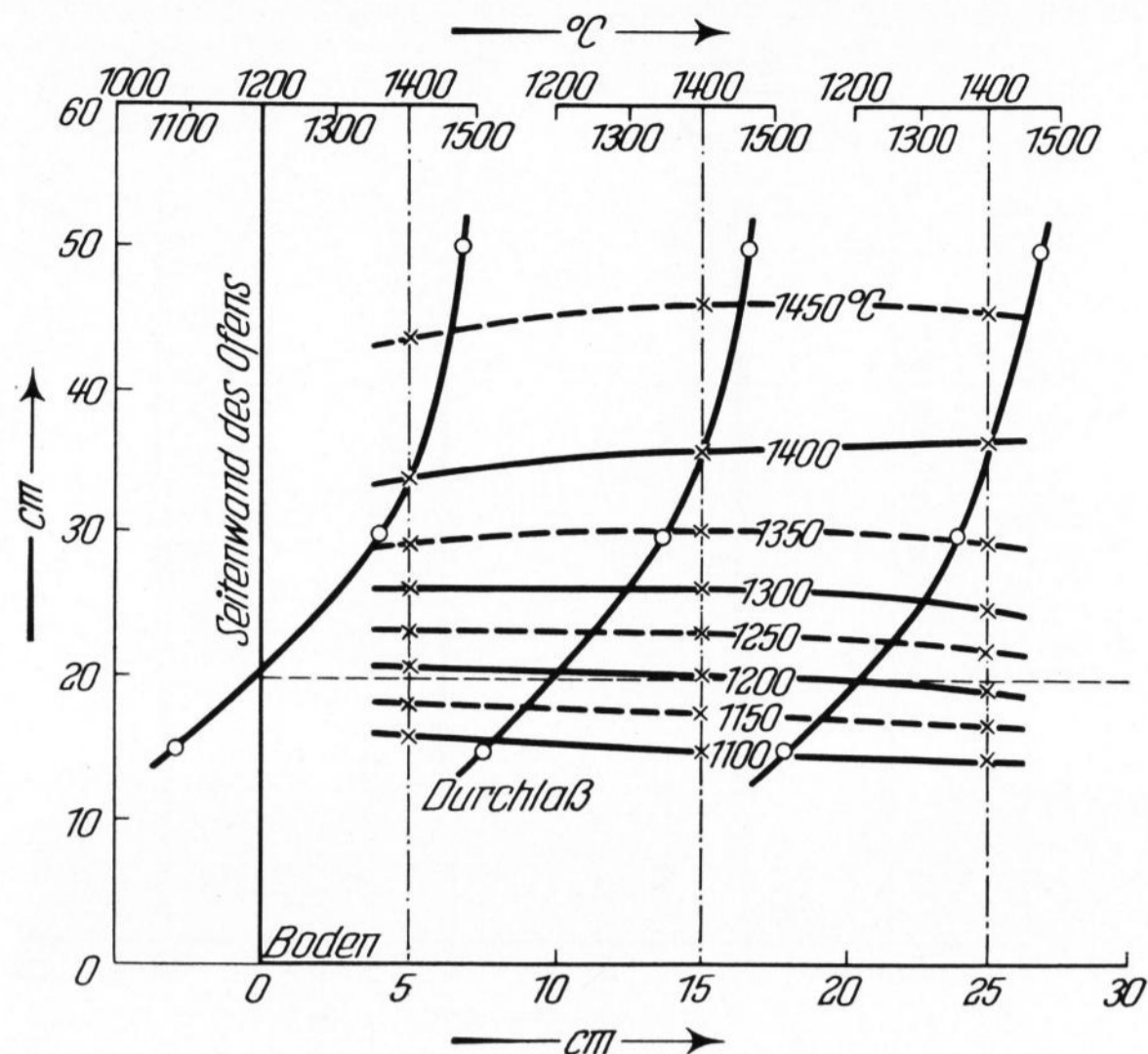


Bild 9. Temperaturgradient, 20 cm vom Durchlaß entfernt, in einer Greenal-Glasschmelze.

In der Schmelze von Rosal-Glas, deren Wärmeleitfähigkeit etwa viermal kleiner als die von Natron-Kalk-Glas ist, wurde ein vertikaler Temperaturgradient (Bild 7) gefunden. 35 cm über dem Wannenboden tritt ein Temperaturgefälle von etwa 8,6 grad/cm auf. Zwischen 15 und 35 cm über dem Wannenboden ist das stärkste Temperaturgefälle von 12,5 grad/cm zu finden (Bild 8). Im unteren Teil der Wanne, etwa 20 cm über dem Boden, bilden die 1250 °C-Isothermen nur gering gewellte Flächen, während — wie aus Bild 8 hervorgeht — die von den 1350 °C- und 1450 °C-Isothermen gebildeten Flächen uneben sind, besonders die 1450 °C-Isotherme verläuft in der Mitte der Wanne näher am Boden als an den Wänden (Bild 9).

In der Greenal-Schmelze, deren Wärmeleitfähigkeit etwa achtmal kleiner ist als die von Natron-Kalk-Glas, ist der Temperaturgradient in vertikaler Richtung noch stärker ausgeprägt als bei Rosal (Bild 9). In 15 bis 50 cm über dem Boden beträgt der Temperaturgradient 11,3 grad/cm, zwischen 15 und 35 beträgt der maximale Temperaturgradient 15 grad/cm. Die von den Isothermen bei 1150 bis 1250 °C gebildeten Flächen (Bild 10) sind fast waagrecht, während die von den 1350 °C- und 1450 °C-Isothermen gebildeten Flächen noch ausgeprägter gewellt sind als bei Rosal.

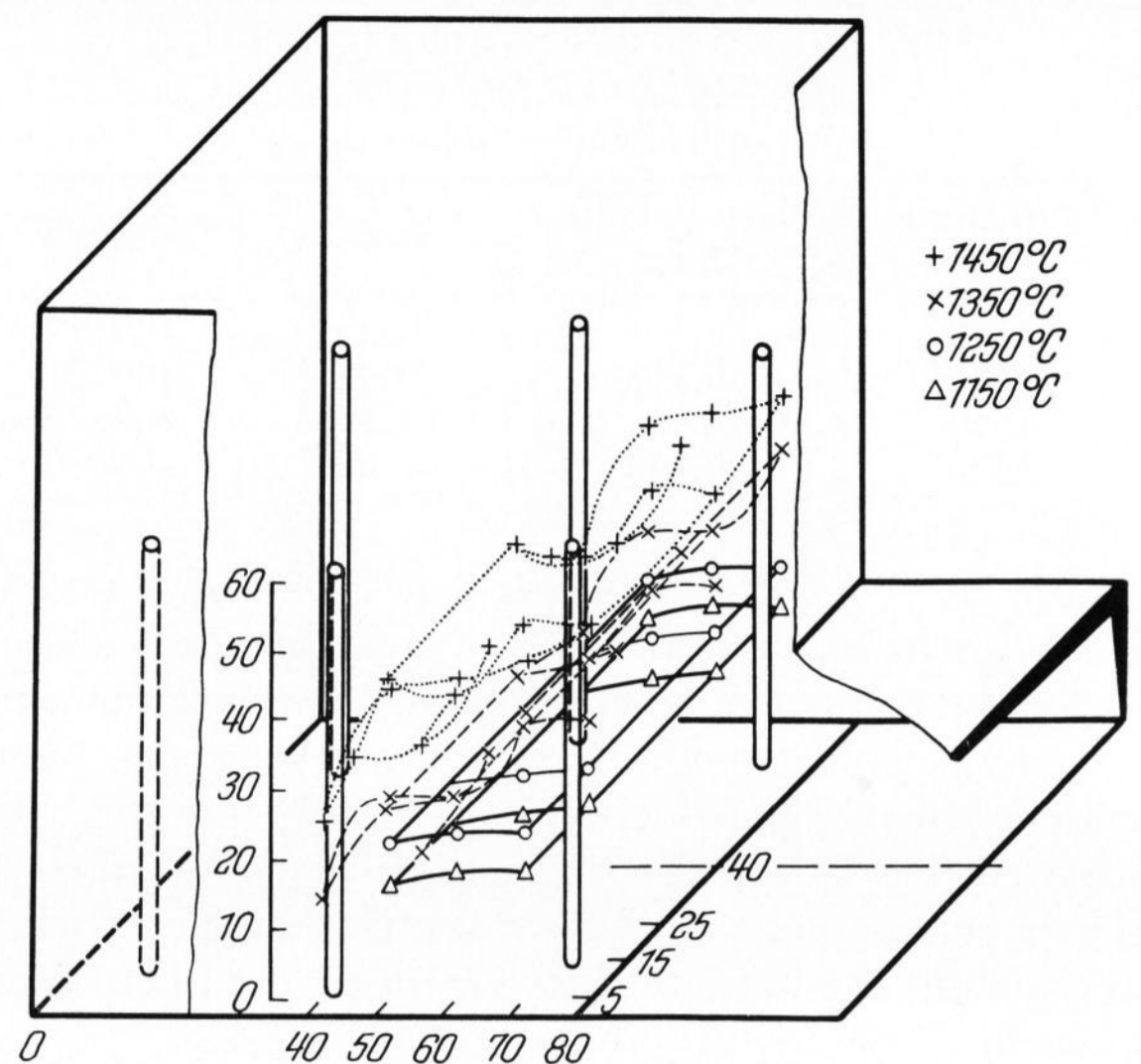


Bild 10. Temperaturverlauf in der Schmelzwanne in der Greenal-Glasschmelze.

## 5. Zusammenfassung

Auf Grund der theoretischen Analyse und mit den beschriebenen Rechenverfahren wurde der elektrische Feldgradient im Schmelzbereich einer elektrisch beheizten Wanne bestimmt und festgestellt, daß eine Vergrößerung des Elektrodendurchmessers von 50 auf 100 mm den elektrischen Feldgradienten nur wenig beeinflusst. Trotzdem wird durch den geringen, von der Vergrößerung des Elektrodendurchmessers verursachten Abfall des elektrischen Feldgradienten die der Schmelze zugeführte spezifische Energie beeinflusst, was besonders beim Schmelzen von Gläsern mit einer niedrigen UR-Durchlässigkeit wichtig ist. Sowohl die berechneten Werte von grad V bzw. der spezifischen Energie als auch die Meßergebnisse, die an einer Modellwanne gewonnen wurden, lassen erkennen, daß in der Schmelze über den ganzen Schmelzbereich keine größeren Temperaturunterschiede als 40 grad auftreten. Daraus läßt sich der Schluß ziehen, daß der Wärmetransport in der Schmelze vorwiegend durch Strahlung erfolgt und die Strahlungskomponente der Wärmeleitfähigkeit die Unterschiede in der Verteilung der spezifischen elektrischen Energie ausgleicht.

## 6. Literatur

- [1] KARPLUS, W. J.: Analog simulation solutions of field problems. New York, London: McGraw Hill 1960.
- [2] PANOV, D. J.: Handbuch für numerische Lösungsmethoden von Differentialgleichungen mittels partieller Ableitungen. (Orig. russ.) Moskau: Gostechizdat 1951.
- [3] HUSKEY, H. D. und KORN, G. A. (Hrsg.): Computer Handbook. New York: McGraw Hill 1962.
- [4] CZERNY, M., GENZEL, L. und HEILMANN, G.: Über den Strahlungsstrom im Inneren von Glaswannen. Glastechn. Ber. 28 (1955) S. 185—190. (50423)