Jülich, 29.6.2024

Autor: Dirk Witthaut

Schlussbericht zum Projekt

GRaph ALgorithms for electricity and multi-energy networks (GRAL-Networks)

Forschungszentrum Jülich
Institute of Climate and Energy Systems:
Energy Systems Engineering (ICE-1)

Förderkennzeichen: 03SF0751

Projektlaufzeit: 1.3.2024 - 31.12.2024

Gefördert durch:

Bundesministerium
für Forschung, Technologie
und Raumfahrt

Die Verantwortung für den Inhalt dieser Veröffentlichung liegt bei den Autoren.

Teil I: Kurzbericht

Projektziel und Motivation

Die Energiewende stellt das Stromsystem vor tiefgreifende Herausforderungen. Mit dem zunehmenden Anteil erneuerbarer Energien müssen große Mengen elektrischer Energie über weite Distanzen transportiert werden. Gleichzeitig wachsen die Kopplungen zwischen den Energiesektoren – etwa durch Wasserstoffinfrastruktur oder Wärmenetze. Damit steigen auch die Anforderungen an Netzplanung und -betrieb.

Das Projekt GRAL-Networks hatte das Ziel, neue mathematische Methoden zur Analyse und Optimierung komplexer Energie- und Stromnetze zu entwickeln. Dabei war die Nutzung und Weiterentwicklung von Ansätzen aus der algebraischen Graphentheorie von zentraler Bedeutung, um fundierte Stabilitätskriterien und effiziente Heuristiken zu formulieren. Die entwickelten Methoden sollen klassische Simulationen ergänzen und die Grundlage für zukünftige Optimierung und Netzplanung schaffen.

Wesentliche Ergebnisse

Strukturelle Stabilität und Instandhaltungsplanung

Ein zentraler Fokus lag auf den Auswirkungen von Leitungsausfällen oder anderen Änderungen der Netzstruktur und der Planung von Instandhaltungsmaßnahmen. Dafür wurden neue mathematische Werkzeuge entwickelt:

- Verallgemeinerte Verteilungsfaktoren: Diese erweitern klassische Methoden, indem sie die Spannung mitberücksichtigen. Dadurch ist eine genauere Bewertung von Leitungsausfällen möglich.
- Effiziente Algorithmen für AC-Lastflussrechnungen: Es wurden mathematische Ideen für GPU-basierte Lösungsverfahren entwickelt, die in Kooperation mit Übertragungsnetzbetreibern zur Anwendungsreife entwickelt werden.
- Quantitative Bewertung von Topologieänderungen: Mithilfe spieltheoretischer Methoden (Shapley-Werte und Shapley-Taylor-Indizes) wurde ein neues Verfahren entwickelt, dass die Wechselwirkungen mehrerer Leitungsausfälle im Netz quantifiziert — ein wichtiger Schritt für Wartungsplanung und Netzsicherheit.

Stabilitätskriterien für die Spannungsdynamik

Im Bereich der Spannungsstabilität wurden zwei komplementäre Aspekte untersucht:

- Statische Stabilität: Es wurden analytische Bedingungen hergeleitet, die gewährleisten, dass Lösungen der AC-Lastflussgleichungen innerhalb technischer Grenzen existieren – insbesondere für Spannungen und Phasenwinkel.
- Dynamische Stabilität: Für dynamische Modelle von Stromnetzen wurde eine neue Form der Stabilitätsanalyse entwickelt, die auf der Definitheit einer bestimmten Matrix basiert. Die Struktur dieser Matrix erlaubt eine Interpretation über graphentheoretische Konzepte und eröffnet neue analytische Zugänge.

Multi-Energie-Netze

Im letzten Arbeitspaket wurde ein allgemeines Optimierungsmodell für Multi-Energie-Systeme entwickelt, das insbesondere auf die Ressourceneffizienz bei gegebener Netzlast abzielt. Eine zentrale Entdeckung war das Phänomen der spontanen Symmetriebrechung: Selbst bei symmetrischer Nachfrage entstehen asymmetrische optimale Netzstrukturen - abhängig von Kostenparametern und Fluktuationsintensität.

Verwertung und Ausblick

Das Projekt hat eine Reihe von theoretisch fundierten Methoden zur Netzbewertung und -optimierung hervorgebracht. Neben den grundlegenden Veröffentlichungen wurde auch Software entwickelt, die für Forschungs- und Anwendungszwecke bereitgestellt wird.

Zudem wurden Kooperationen mit verschiedenen Übertragungsnetzbetreibern etabliert. Insbesondere die dynamische Optimierung der Netztopologie verspricht große Potenziale zur Reduktion der Kosten für das Engpassmanagement. Die entwickelten Methoden bieten hier eine mathematisch fundierte Grundlage.

Die Ergebnisse des Projekts sind in drei Fachartikeln dokumentiert:

[1] van Dijk, J., Westerbeck, N., Schewe, L., Benigni, A. & Witthaut, D. Unified algebraic deviation of distribution factors in linear power flow. *arXiv preprint arXiv:2412.16164* (2024).

[2] Bačić, I., Hartmann, C., Böttcher, P. C. Gross, D., Benigni, A., Witthaut, D. Existence of phase-cohesive solutions of the lossless power flow equations. *Authorea Preprints, DOI:10.36227/techrxiv.174611978.89382822/v1* (2025).

[3] Parameswaran, A., Bačić, I., Benigni, A. & Witthaut, D. Symmetry breaking in minimum dissipation networks. *arXiv preprint arXiv:2505.24818* (2025).

Weitere Veröffentlichungen, unter anderem auf der Power Systems Computing Conference (PSCC) 2026, sind in Vorbereitung.

Teil II: Eingehende Darstellung

Inhaltlicher Überblick und Ergebnisse

Eine zuverlässige Versorgung mit elektrischer Energie ist unabdingbar für unsere Wirtschaft, Industrie und unser tägliches Leben. Die Energiewende führt zu neuen Herausforderungen bei Auslegung und Betrieb des Stromnetzes [1]. So müssen große Menge Elektrizität über weite Entfernungen übertragen werden, was die Stabilität des Netzes bedroht [2]. Gleichzeitig wachsen die Verbindungen und Abhängigkeiten zwischen verschiedenen Sektoren und Netzen, zum Beispiel durch Aufbau von Wasserstoffinfrastrukturen und Power-to-Gas oder den Ausbau der Wärmenetze [3, 4].

Das Projekt GRAL-Networks befasste sich mit der Entwicklung neuer Algorithmen und mathematischer Methoden für die Auslegung und Analyse von Stromnetzen und Multi-Energie-Netzen. Zu diesem Zweck wurden grundlegende Ideen und Konzepte der algebraischen Graphentheorie für konkrete Anwendungsfälle nutzbar gemacht und weiterentwickelt. Ziel des Projektes war die Entwicklung rigoroser, analytischer Stabilitätskriterien und effektiver Heuristiken, die etablierte Simulationswerkzeuge ergänzen.

Das Projekt wurde wie geplant durchgeführt und es wurden weitreichende wissenschaftliche Ergebnisse erzielt. Bisher wurden drei Manuskripte zur Veröffentlichung eingereicht [5–7]. Weitere Ergebnisse sollen im Rahmen der Power Systems Computing Conference (PSCC) 2026 veröffentlicht werden. Aufgrund der Ergebnisse dieses Projekts konnten Kooperationen mit verschiedenen Übertragungsnetzbetreibern etabliert werden, was die wirtschaftliche Verwertung der Projektergebnisse ermöglicht.

Das Projekt wurde geleitet von Prof. Dr. Dirk Witthaut und Prof. Dr.-Ing. Andrea Benigni. Das Projekt wurde durchgeführt von Dr. Iva Bačić mit zeitweiliger Unterstützung von Dr. Philipp C. Böttcher, MSc Marc Hunkemöller und MSc Aarathi Parameswaran.

AP1: Strukturelle Stabilität und Instandhaltungsplanung

Die Überlastung des deutschen Übertragungsnetzes wird zunehmend problematisch. Maßnahmen zum Engpassmanagement wie Redispatch und Counter-Trading führen zu Kosten von über einer Milliarde Euro jährlich. Langfristig kann dieses Problem nur durch einen umfassenden Netzausbau gelöst werden, kurzfristig muss der Netzbetrieb optimiert werden. Dies umfasst vor allem zwei Bereiche: (i) eine bessere Planung und Koordination von Wartungsmaßnahmen und (ii) eine Optimierung von flexiblen Netzelementen, insbesondere der Kopplung oder Entkopplung von Sammelschienen (vgl. Abb. 1). Zwei Faktoren machen die Optimierung der Netzstruktur zu einem schwierigen Problem: (i) Für jede mögliche Netztopologie muss eine volle $n-1$-Ausfallrechnung durchgeführt werden, damit jederzeit ein sicherer Betrieb gewährleistet ist. (ii) Eine exakte Optimierung ist praktisch unmöglich, so dass heuristische Optimierungsverfahren wie z.B. genetische Algorithmen verwendet werden müssen. Auch dafür muss eine riesige Anzahl möglicher Netztopologien simuliert werden.

Im Austausch mit Übertragungsnetzbetreibern verfolgen wir im Moment drei Forschungsrichtungen wie bereits in den Zwischenberichten dargestellt. Im folgenden wird der Projektfortschritt in diesen drei Bereichen detailliert beschrieben.

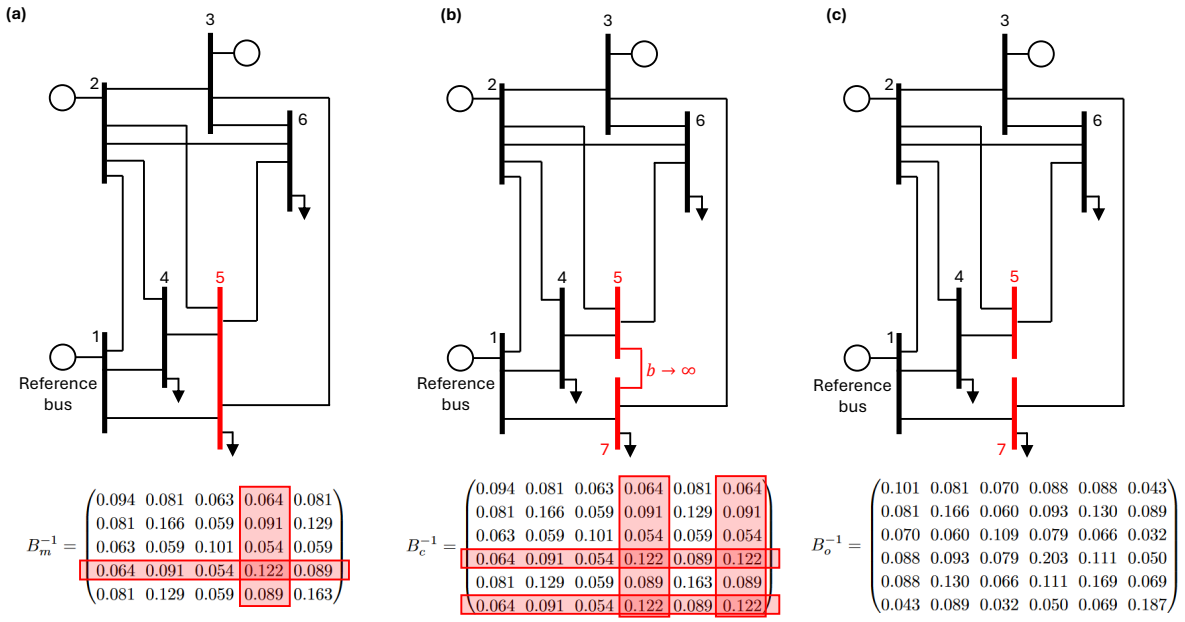

Abbildung 1: Beispiel für die Auftrennung einer Sammelschiene in der Topologieoptimierung. Der Netzknoten 5 wird aufgeteilt in zwei neue Knoten 5 und 7. Die drei Spalten zeigen die Schritte zur mathematischen Behandlung dieser Topologieänderung gemäß unserer Arbeit [5]: (a) Ausgangstopologie. (b) Die Sammelschienen werden getrennt bilanziert, sie sind aber mathematisch noch durch eine ideale Leitung ($b_s \to \infty$) verbunden. (c) Die finale Konfiguration in der die ideale Leitung entfernt wurde. Die untere Reihe zeigt die Inverse der geerdeten Laplace-Matrix, die in der Netzberechnung verwendet wird. Das Beispiel basiert auf dem Testnetz `case6ww` aus der Software `Matpower` 8.0 [9], basierend auf einem Beispiel in dem Lehrbuch [10].

Ausfallrechnung

Derzeit werden Methoden zur Optimierung der Netztopologie entwickelt, die ausschließlich die lineare DC-Näherung verwenden. Eine Behandlung von Topologieänderungen inklusive der der $n-1$-Ausfallrechnung ist in diesem Fall mithilfe von "Distribution Factors" möglich. So sind zum Beispiel die "Line Outage Distribution Factors (LODFs)" Standardgrößen in der Netzberechnung. Zwei Herausforderungen bleiben bestehen, die im Rahmen dieses Projekts adressiert wurden.

1. Die flexible Kopplung und Trennung von Sammelschienen ist essentielle für die Topologieoptimierung. Für diesen Fall konnten die entsprechenden Distribution Factors erst kürzlich berechnet werden [8], allerdings ist diese Herleitung überaus umständlich und schwer verallgemeinerbar.

2. Die üblicherweise verwendeten verwendeten Distribution Factors basieren auf der DC-Näherung. Diese beschreibt nur den Fluss von Realleistung und vernachlässigt die Variation von Spannungsamplituden.

Als ersten Schritt in diesem Projekt haben wir die bestehenden Herleitungen der verschiedenen Distribution Factors vereinheitlicht und verallgemeinert. Wir haben ein einheitliche algebraische Formulierung entwickelt, die die Herleitung wesentlich vereinfacht und dadurch

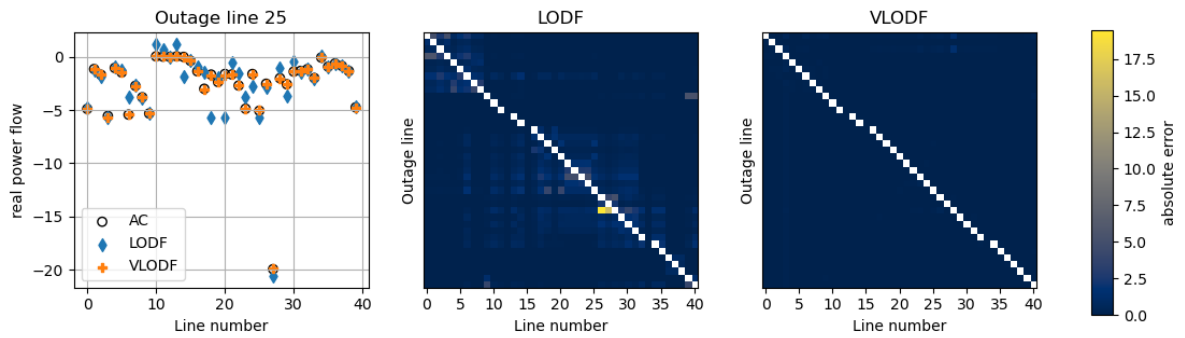

Abbildung 2: Numerischer Test der "Voltage Sensitive Line Outage Distribution Factors (VLODFs)". Für das etablierte Testnetzwerk case30 berechnen wir die Lastflüsse auf allen Leitungen nach dem Ausfall einer anderen Leitung. Dabei vergleichen wir die im Projekt entwickelten "Voltage Sensitive Line Outage Distribution Factors (VLODFs)" mit den etablierten LODFs und der numerisch exakten AC-Lösung. Links: Lastflüsse nach dem Ausfall der Leitung 25. Die VLODFs bilden die Flüsse fast perfekt ab, während die etablierten LODFs teilweise deutlich abweichen. Mitte: Abweichung der LODFs von der exakten AC-Lösung für alle möglichen Ausfälle. Rechts: Abweichung der VLODFs von der exakten AC-Lösung für alle möglichen Ausfälle. Man erkennt, dass die Abweichung bei Verwendung der VLODFs in vielen Fällen deutlich geringer ist.

deutlich einfacher auf neue Probleme übertragen werden kann. Insbesondere treten bei der Behandlung von Problemen der Topologieoptimierung (Verbindung von Sammelschienen, Öffnen von Schaltern) Grenzwertprozesse auf, die vorher nur sehr mühsam zu behandeln waren [8]. Dieses Problem wurde weitgehend gelöst. Die Ergebnisse wurden zur Veröffentlichung eingereicht und sind derzeit auf einem Preprintserver zugänglich [5].

Darauf aufbauend haben wir eine Erweiterung von LODFs und anderen Distribution Factors entwickelt, die Blindleistung und Spannungsamplituden mit einschließt. Zudem wurde das Konzept der LODFs auf verschiedene Schalthandlungen in Umspannwerken erweitert, insbesondere auf das Koppeln oder Trennen von Sammelschienen. Die entwickelten verallgemeinerten "Voltage Sensitive Line Outage Distribution Factors (VLODFs)" wurden anhand von Standard-Testnetzen numerisch überprüft. Ein Beispiel für ein kleines Netz ist in Abbildung 2 dargestellt. Man erkennt dass die VLODFs eine deutlich bessere Näherung für die Realleistungsflüsse im $n-1$-Fall bieten als die üblichen LODFs. Eine Veröffentlichung dieser Ergebnisse gemeinsam mit Ingenieuren eines Übertragungsnetzbetreibers im Rahmen der nächsten "Power Systems Computing Conference" wird angestrebt.

Verfahren zur schnellen Lösung der AC-Lastflussgleichungen

In Zukunft soll die Optimierung der Netztopologie auf Grundlage der vollen nichtlinearen AC-Lastflussgleichungen erfolgen. Dies erfordert sehr schnelle numerische Verfahren zur Lösung dieser nichtlinearen Gleichungen. Diese Lösung erfolgt typischerweise iterativ mit dem Newton-Raphson-Verfahren, bei dem in jedem Schritt ein lineares Gleichungssystem gelöst werden muss. Da für jede Netztopologie eine volle $n-1$-Ausfallrechnung durchgeführt werden muss, ist eine Parallelisierung des Verfahrens unumgänglich.

Grafikprozessoren (GPUs) eignen sich ideal für die parallele Lösung einer großen Anzahl linearer Gleichungssysteme. Algorithmen zur parallelen Lösung der Lastflussgleichung für ei-

ne hohe Zahl an Einspeiseszenarien sind verfügbar. Da zur Sicherstellung der Stabilität der berechneten Lösung allerdings erneut die Berechnung aller $n-1$ Ausfallszenarien benötigt wird, ist eine Nutzung dieser Algorithmen typischerweise nicht möglich. Die volle Rechenleistung einer GPU kann man nur ausnutzen, wenn man vorab alle Rechenschritte genau spezifizieren kann. Bei Änderungen der Netztopologie ist dies aber gerade nicht möglich, da sich die Struktur der zu lösenden linearen Gleichungssysteme ändert. Im Rahmen des Projekts GRAL-Networks wurden mathematische Ideen entwickelt, dieses Problem zu umgehen. Auf dieser Grundlage konnten wir eine Kooperation mit dem Übertragungsnetzbetreiber 50Hertz etablieren. Im Rahmen dieser Kooperation erfolgt die Ausarbeitung eines modifizierten Newton-Raphson-Verfahren und eine eine Implementierung für GPUs, sowie ein Test der entwickelten Verfahren. Eine Veröffentlichung erfolgt im Anschluss.

Im Rahmen des Projekts GRAL-Networks haben wir zudem an Reformulierungen wesentlicher Teile des Newton-Raphson-Verfahrens gearbeitet. Diese Reformulierung kann die Konvergenz des Verfahrens verbessern und die Berechnung beschleunigen. Die wesentliche Modifikation des Verfahrend betrifft die Lösung des linearen Gleichungssystems in jedem Schritt der Newton-Raphson-Iteration. Für verlustfreie Netze haben wir das folgende Theorem bewiesen.

Die folgenden Aussagen sind äquivalent:
1. Die Vektoren $\Delta\boldsymbol{\theta}$ und $\Delta\boldsymbol{u}$ (das Update von Phasenwinkeln und Spannungsamplituden in der Newton-Raphson-Iteration) erfüllen das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{E}\boldsymbol{K}\boldsymbol{E}^\top & \boldsymbol{E}\boldsymbol{F}\hat{\boldsymbol{I}}^\top \\ \hat{\boldsymbol{I}}\boldsymbol{F}\boldsymbol{E}^\top & \boldsymbol{M}-\hat{\boldsymbol{I}}\boldsymbol{K}\hat{\boldsymbol{I}}^\top \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta\boldsymbol{\theta} \\ \Delta\boldsymbol{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{P}-\boldsymbol{p}_n \\ \boldsymbol{Q}-\boldsymbol{q}_n \end{pmatrix} \tag{1}$$

2. Die Vektoren $\Delta\boldsymbol{\psi}$, $\Delta\boldsymbol{u}$ und $\Delta\boldsymbol{\lambda}$ erfüllen das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{K} & \boldsymbol{C} & \boldsymbol{F}\hat{\boldsymbol{I}}^\top \\ \boldsymbol{C}^\top & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \hat{\boldsymbol{I}}\boldsymbol{F} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{M}-\hat{\boldsymbol{I}}\boldsymbol{K}\hat{\boldsymbol{I}}^\top \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta\boldsymbol{\psi} \\ \Delta\boldsymbol{\lambda} \\ \Delta\boldsymbol{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{D}(\boldsymbol{P}-\boldsymbol{p}_n) \\ \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{Q}-\boldsymbol{q}_n \end{pmatrix} \tag{2}$$

und es gilt $\Delta\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{E}^\top\Delta\boldsymbol{\theta}$. Hierbei ist $\Delta\boldsymbol{\lambda}$ eine Schlupf-Variable, $\boldsymbol{E}$ die Kanteninzidenzmatrix, $\hat{\boldsymbol{I}}$ die vorzeichenlose Kanteninzidenzmatrix, $\boldsymbol{C}$ die Mascheninzidenzmatrix und $\boldsymbol{D}$ eine Rechts-Inverse von $\boldsymbol{E}$.

Quantifizierung von Topologieänderungen zur Bewertung der Netzsicherheit

Die Quantifizierung der Auswirkungen von Topologieänderungen stellt einen zentralen Schritt bei der Bewertung der Netzsicherheit und der Planung von Stromnetzen dar. Insbesondere müssen Leitungsabschaltungen im Rahmen von Wartungsarbeiten oder dem Netzausbau sorgfältig geplant werden. Ein wesentliches Ziel besteht darin, Engpasskosten zu minimieren und Risiken für die Systemsicherheit infolge geplanter Abschaltungen kritischer Leitungen zu vermeiden. Eine zentrale Fragestellung lautet daher: Welche Abschaltungen tragen am stärksten zur Netzbelastung bei? Die Beantwortung dieser Frage ist besonders herausfordernd, da die Auswirkungen stark nichtlinear von allen übrigen Änderungen abhängen. Bekannte Indikatoren für Einzelausfälle wie die linearen Outage Distribution Factors (LODFs) erfassen solche Wechselwirkungen nicht. Diese Interaktionen sind jedoch essenziell für die Planung von Abschaltungen, etwa um die gleichzeitige Stilllegung stark interagierender Leitungen zu vermeiden.

Im Rahmen dieses Projekts haben wir ein neues Analysekonzept zur Bewertung mehrerer simultaner Topologieänderungen entwickelt, das sowohl individuelle Beiträge einzelner Änderungen als auch ihre Wechselwirkungen berücksichtigt. Die Analyse basiert auf verallgemeinerten Outage Distribution Factors nach Güler et al. [11] sowie verwandten Verteilungsfaktoren [5].

Aufbauend auf dem Konzept der Shapley-Werte aus der kooperativen Spieltheorie [12] zeigen wir, wie sich die Auswirkungen einzelner Leitungsänderungen voneinander abgrenzen lassen. Darüber hinaus diskutieren wir den Einsatz von Shapley-Taylor-Indizes zur Analyse von Interaktionseffekten und stellen ein approximatives Berechnungsschema vor.

Die Methodik basiert auf der linearen DC-Approximation der Lastflussgleichungen,

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{p},$$

wobei $\boldsymbol{\theta}$ die Knotenspannungswinkel und $\boldsymbol{p}$ die Wirkleistungseinspeisungen repräsentieren. Änderungen an M Leitungen modifizieren die Knotensuszeptanzmatrix:

$$\boldsymbol{B}_0 \to \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}_0 + \sum_e \Delta b_e \boldsymbol{\nu}_e \boldsymbol{\nu}_e^\top = \boldsymbol{B}_0 + \boldsymbol{U}\boldsymbol{D}\boldsymbol{U}^\top.$$

Daraus ergibt sich eine Veränderung der Spannungswinkel:

$$\Delta\theta = -\boldsymbol{B}_0^{-1}\boldsymbol{U}\left(\boldsymbol{D}^{-1} + \boldsymbol{U}^\top \boldsymbol{B}_0^{-1}\boldsymbol{U}\right)^{-1}\boldsymbol{U}^\top \boldsymbol{B}_0^{-1}\boldsymbol{p}. \tag{3}$$

Die zentrale Fragestellung lautet nun, wie diese Änderungen den einzelnen Topologieänderungen Δb_e zugeordnet werden können. Die Shapley-Werte bieten hierfür ein additives Zuweisungsschema:

$$\Delta\boldsymbol{\theta} = \sum\nolimits_{e=1}^{M} \phi_e(\boldsymbol{B}_0, \boldsymbol{p}), \tag{4}$$

wobei ϕ_e den Beitrag der Änderung Δb_e der Leitung e beschreibt. Dieses Zuweisungsschema ist eindeutig und erfüllt drei zentrale Axiome: (1) Effizienz (die Summe aller Beiträge ergibt die Gesamtauswirkung), (2) Nullspieler (eine Änderung ohne Wirkung auf das Netz erhält keinen Beitrag) und (3) Konsistenz (z. B. bei Änderungen der Einspeisungen $\boldsymbol{p}$).

Im Projekt haben wir gezeigt, wie dieses Konzept auf reale Leistungsflüsse und gebräuchliche Verteilungsfaktoren angewendet werden kann. Darüber hinaus haben wir den Einsatz von Shapley-Taylor-Indizes untersucht, mit denen direkte und indirekte Wechselwirkungen getrennt bewertet werden können. Diese Indizes erben viele der wünschenswerten Eigenschaften der Shapley-Werte.

Da die exakte Berechnung von Shapley-Werten und Shapley-Taylor-Indizes mit wachsender Anzahl an Leitungsänderungen M jedoch rechnerisch sehr aufwendig ist, entwickeln wir derzeit ein Näherungsverfahren. Dieses basiert auf einer geeigneten Zerlegung des Netzes in Gruppen von Leitungen mit schwachen Wechselwirkungen.

AP2: Stabilitätskriterien für die Spannungsdynamik

In diesem Arbeitspaket wurden Aspekte der Spannungsstabilität in Übertragungsnetzen untersucht. Dabei wurden in zwei Bereichen umfassende mathematische Ergebnisse erzielt: In (i) der Analyse des Zusammenspiels von Winkel- und Spannungsstabilität in statischen Modellen und (ii) der linearen Stabilitätsanalyse in dynamischen Modellen.

Winkel- und Spannungsstabilität in den Lastflussgleichungen

Die Lösungen der *AC-Lastflussgleichungen* beschreiben den stationären Zustand eines Stromnetzes. Sie leiten sich aus der Energieerhaltung und dem Ohmschen Gesetz ab und abstrahieren somit von der Dynamik an den einzelnen Knotenpunkten. Die Lastflussgleichungen setzen die Einspeisung von Wirk- und Blindleistung (P_n und Q_n) an einem Knotenpunkt n in Beziehung zu den Spannungsamplituden v_n und den Phasenwinkeln θ_n,

$$\begin{aligned} P_m &= \sum_n v_m v_n \left(G_{mn}\cos(\theta_m - \theta_n) + B_{mn}\sin(\theta_m - \theta_n)\right) \\ Q_m &= \sum_n v_m v_n \left(G_{mn}\sin(\theta_m - \theta_n) - B_{nm}\cos(\theta_m - \theta_n)\right) \end{aligned} \tag{5}$$

Hier sind G_{mn} und B_{mn} die Elemente der Knotenkonduktanzmatrix bzw. Knotensuszeptanzmatrix.

Eine zentrale Frage im Entwurf und Betrieb des Stromnetzes ist, ob das Netz bei gegebener Einspeisung und Nachfrage jederzeit stabil ist. Konkret sind die Leistungen P_m und Q_m gegeben, z.B. aufgrund der Kraftwerksfahrpläne und dem zu erwartenden Verbrauch für den nächsten Tag. Erfüllen die Lösungen der Lastflussgleichungen dann die technischen Grenzwerte für die Phasenwinkel θ_n und Spannungsamplituden v_n?

Im Rahmen dieses Projekts konnten zu zwei Teilaspekten dieses Problems wesentliche rigorose Ergebnisse erzielt werden. Einerseits konnten Grenzwerte der zu erwartenden Phasendifferenz $|\theta_m - \theta_n|$ und somit des zu erwartenden Lastflusses für alle Leitungen (n, m) ermittelt werden. Andererseits konnten die Auswirkungen eines Abfalls der Spannungsamplituden auf die Phasendifferenzen ermittelt werden. Wir konnten explizite und sehr aussagekräftige hinreichende Bedingungen für die Existenz geeigneter Lösungen in verlustfreien Netzen beweisen. Ein Beispiel ist in Abb. 3 dargestellt. Die Ergebnisse wurden zur Veröffentlichung eingereicht und sind derzeit auf einem Preprintserver zugänglich [6].

Lineare Stabilität in dynamischen Modellen

In den vorangegangenen BMBF-geförderten Projekt CoNDyNet und CoNDyNet2 haben wir Stabilitätskriterien für Netzwerke aus Synchronmaschinen und leistungselektronischen Wechselrichtern abgeleitet. Wir haben gezeigt, dass ein Fixpunkt nur dann linear stabil ist, wenn eine reduzierte Jacobimatrix der Form

$$J = \begin{pmatrix} EKE^\top & EFI^\top \\ IFE^\top & M - IKI^\top \end{pmatrix} \tag{6}$$

negativ definit ist. Hier sind E und I die vorzeichenbehaftete und die vorzeichenlose Inzidenzmatrix mit den Elementen

$$E_{i,a} = \begin{cases} 1 & \text{falls Kante } a \text{ am Knoten } i \text{ startet,} \\ -1 & \text{falls Kante } a \text{ am Knoten } i \text{ endet,} \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{7}$$

$$I_{i,a} = |E_{i,a}| \tag{8}$$

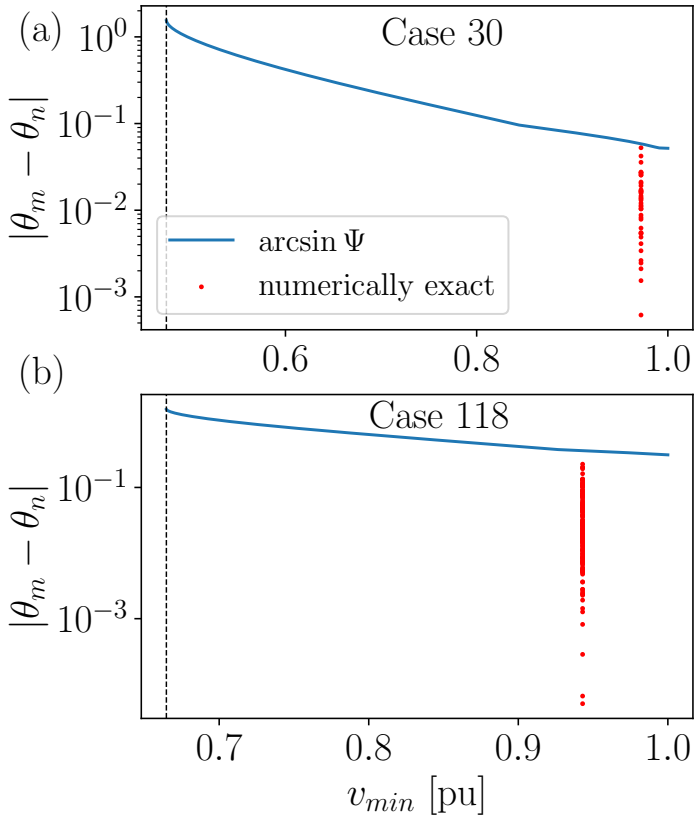

Abbildung 3: Auswirkung der Spannungsstabilität auf die maximale Phasendifferenz $|\theta_m - \theta_n|$ in verlustfreien Stromnetzen. Die blaue Linie zeigt eine obere Schranke für die Phasendifferenzen in Abhängkeit der minmalen Spannungsamplitude $v_{min} = \min_n v_n$ [6]. Die roten Punkte zeigen die tatsächlichen Werte der Phasendifferenzen $|\theta_m - \theta_n|$ für alle Leitungen im Netz. Die Testnetzwerke wurden aus [9] entnommen.

Die Matrizen K und F sind diagonal im Raum der Kanten; ihre Elemente hängen vom Leistungsfluss auf der jeweiligen Kante ab. Die Matrix M ist diagonal im Raum der Knoten; ihre Elemente hängen von den Parametern und Zustandvariablen der jeweiligen Maschine ab. Im Rahmen dieses Projektes konnten wir zwei hinreichende Bedingungen für die Stabilität des Netzwerkes herleiten:

1. Die Matrix J ist negativ definit, wenn die folgenden zwei Bedingungen für jede Kante des Netzwerkes erfüllt sind:

$$|\theta_i - \theta_j| < \pi/2$$
$$\frac{\max(v_j/v_i, v_i/v_j)}{\cos(\theta_i - \theta_j)} < \eta_{\text{crit}}.$$

   Hier bezeichnet θ_i den Phasenwinkel und v_i den Betrag der Spannung am Netzknoten i. Die obere Grenze η_{crit} hängt dabei von den Parametern der Maschinen (den Einträgen der Matrix M) und der Netztopologie ab.

2. Wir konnten einen recht einfachen Metagraphen definieren so dass gilt: Die Matrix J ist negativ definit, wenn die vorzeichenbehaftete Laplacematrix des Metagraphen positiv definit ist. Für die weitere Analyse dieser Laplacematrix kann man auf einer Vielzahl von Ergebnissen aus der algebraischen Graphentheorie aufbauen.

Im Rahmen dieses Projekts wurden die mathematischen Grundlagen erarbeitet und die oben genannten Resultate formal bewiesen. Die hergeleiteten Bedingungen sind hinreichend, aber nicht notwendig. Somit muss noch untersucht werden wie streng und damit aussagekräftig diese Bedingungen sind. Dies war im Jahr 2024 nicht mehr möglich, so dass die Veröffentlichung der Ergebnisse noch aussteht.

AP3: Multi-Energie-Netze

Das letzte Arbeitspaket befasst sich mit der Struktur und dem Entwurf "optimaler" Netzwerkstrukturen. Wir haben die grundlegenden strukturellen Eigenschaften optimaler multimodaler Netzwerke analysiert. Die Ergebnisse sollen den Entwurf realer Netzwerke verbessern. In der Folge sollen sie daher auf spezifische Netzwerkmodelle erweitert werden.

Im ersten schritt haben wir ein Referenz-Modell für optimale Netzwerkstukturen untersucht. Herbei wird die Struktur so optimiert, dass Dissipation bei beschränkten Ressourcen minimal wird [13, 14]. Die Optimierungsvariablen sind die Kapazitäten k_e der einzelnen Leitungen e. In vielen technische relevanten Netzwerken (Stromnetze in der DC-Näherung [1], hydraulische Netzwerke [15], ...) wird der Fluss über eine Leitung durch eine lineare Gleichung beschrieben,

$$F_e = k_e(\theta_{\mathrm{from}(e)} - \theta_{\mathrm{to}(e)}), \tag{9}$$

und die mittlere Dissipation ist gegeben durch

$$\bar{D} = \sum_{\text{Leitungen } e} \frac{\langle F_e^2 \rangle}{k_e}, \tag{10}$$

wobei $\langle \cdot \rangle$ den Mittwelwert über die verschiedenen Netznutzungsfälle darstellt. Wir haben somit das Optimierungsproblem

$$\begin{aligned} k_e^* =& \mathrm{argmin}_{k_e} \bar{D} \\ \text{s.t.} & \sum_{\text{Leitungen } e} k_e^\gamma \leq \kappa^\gamma \\ & \sum_{\text{Knoten } n} F_{n\to m} = S_m \qquad \text{für alle Knoten } m. \end{aligned} \tag{11}$$

Die erste Nebenbedingung modelliert beschränkte Ressourcen mit einem Skalenfaktor γ, der vom genauen Typ des Netzes abhängt [13]. Die zweite Nebenbedingung ist die Kontinuitätsgleichung: An jedem Knoten m ist die Summe der Flüsse gleich der Quellstärke S_m. Wir betonen dass in diesem Modell die Rolle von Ressourcen und Dissipation vertauscht werden können. Das heißt, man erhält äquivalenten Ergebnisse wenn man die Ressourcen oder Kosten minimiert bei einer oberen Grenze für die Dissipation $\bar{D}$.

Wir haben das Optimierungsmodell (11) für den Fall elementarer und multimodaler Versorgungsnetze analysiert. Das wesentliche Ergebnis der aktuellen Untersuchungen ist die spontane Symmetriebrechung der optimalen Struktur: Auch wenn das ursprüngliche Optimierungsproblem eine räumliche Symmetrie aufweist, ist das optimale Netzwerk nicht notwendigerweise symmetrisch. Ein Beispiel ist in Abbildung 4 dargestellt. Das Netzwerk besteht aus zwei "Ebenen", dies modelliert z.B. Netze für zwei Energieträger. Das gesamte System

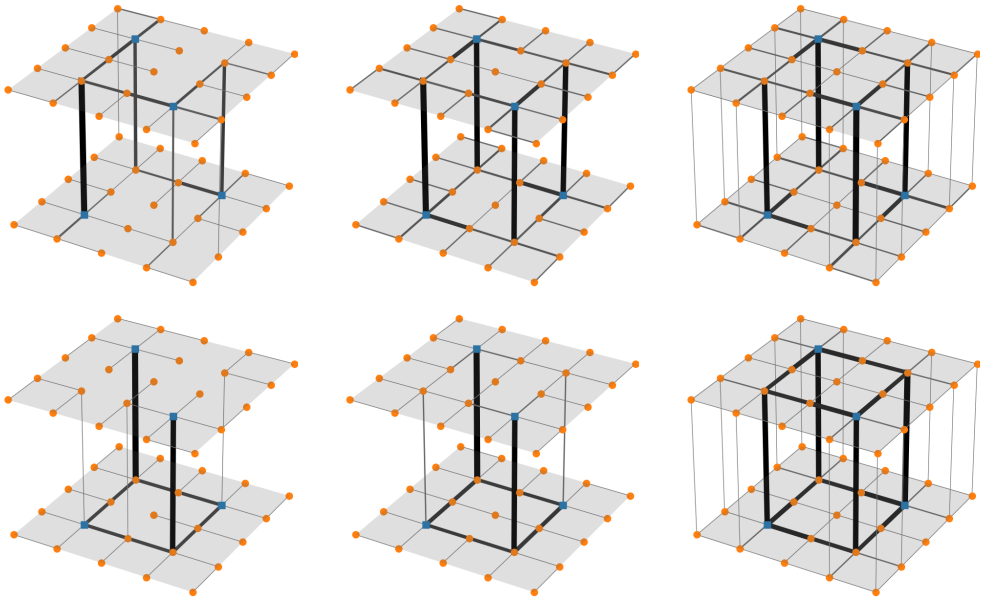

Abbildung 4: Spontane Symmetriebrechung in einem multimodalen Versorgungsnetzwerk. Gezeigt ist die optimale Struktur in eine Netzwerk mit vier Quellen (■) for (a-c) weak fluctuations $\beta = 0.5$ and (d-f) strong fluctuations $\beta = 2.0$. The cost parameter increases from left to right.

ist bezüglich (a) einer räumlichen Drehung um $180°$ und (b) einem Austausch der beiden Ebenen mit Drehung symmetrisch. Für große Werte des Skalenparameters γ findet sich diese Symmetrie auch in der optimalen Netzwerkstruktur; für kleine Werte von γ ist sie spontan gebrochen. Somit lässt sich ein Übergang von einer Phase, die eine symmetrische Netzwerkstruktur aufweist, zu einer Phase, in der diese Symmetrie gebrochen ist, beobachten. Die Fluktuationen von Erzeugung und Verbrauch haben einen nicht-trivialen Einfluss auf diesen Übergang. Grundsätzlich ist eine symmetrische Struktur bei mittelstarken Fluktuationen günstiger, während bei kleinen oder hohen Werten eher Symmetriebrechung potentiell günstiger ist. Die Untersuchungsergebniss haben wir bereits als Preprint veröffentlicht [7]; die Einreichung des Manuskriptes bei einer wissenschaftlichen Zeitschrift erfolgt in den nächsten Wochen.

Symmetriebrechung ist ein fundamentales Konzept in der statistischen Physik mit weitreichenden Konsequenzen. In der Zukunft wollen wir den etablierten Methodenkanon der Physik auf die Probleme optimaler Netzwerke anwenden. Zudem sollen die untersuchten Modelle deutlich realistischer werden. Die bisherigen Ergebnisse führen direkt zu folgenden Forschungsfragen:

- Selbst bei symmetrischer Nachfrage nach verschiedenen Energieträgern, z.B. Strom und Wasserstoff, ist das optimale System nicht notwendigerweise symmetrisch. Die Kosten für neue Leitungen bestimmen welche Struktur geeigneter ist, z.B. (i) der Aufbau eines Wasserstoffnetzes versus (ii) der massive Ausbau des Stromnetzes und lokale Umwandlung von Elektrizität in Wasserstoff.

- Die Fluktuationen von Nachfrage und Verbrauch können entscheidend sein. Das macht den Netzausbau pfadabhängig. Es ist durchaus möglich, dass ein symmetrischer Ausbau

mittelfristig (bei mittleren Fluktuationen) zu den geringsten Systemkosten führt, kurz- und langfristig jedoch nicht.

Voraussichtlicher Nutzen und Verwertbarkeit

Das Projekt GRAL-Networks stellt im Wesentlichen Grundlagenforschung dar; in diesem Bereich hat es zu wichtigen neuen Erkenntnissen und der Weiterentwicklung wissenschaftlicher Methoden beigetragen. Im Rahmen des Projektes wurden bisher drei Artikel für die Veröffentlichung in wissenschaftlichen Fachzeitschriften erstellt. Weitere Ergebnisse sollen im Rahmen der Power Systems Computing Conference (PSCC) 2026 veröffentlicht werden. Nach der Begutachtung von Kurzfassung wurden wir zur Einreichung vollständiger Artikel bis Oktober 2025 aufgefordert.

Neben den grundlegenden Arbeiten wurde im Rahmen des Projektes auch wissenschaftliche Software entwickelt, die weiterhin genutzt werden soll. Diese Software wird grundsätzlich zusammen mit den Artikeln, z.B. auf der Plattform GitHub, veröffentlicht.

Im Jahr 2024 haben wir Kooperationen mit drei Übertragungsnetzbetreibern aufgebaut: 50Hertz, Tennet und Amprion. Im Rahmen dieser Zusammenarbeit sollen die grundlegenden Ergebnisse und mathematischen Erkenntnisse für die industrielle Anwendung nutzbar gemacht werden. Insbesondere im Bereich der dynamischen Topologieoptimierung gibt es ein großes Potential. Durch das Öffnen von Kuppelstellen in Umspannwerken kann die Netztopologie geändert und somit Netzengpässe abgemildert werden. Dies kann zur Reduktion der stetig wachsenden Kosten für Redispatch und Countertrading beitragen. Die Optimierung ist jedoch mathematische höchst anspruchsvoll. Hier können die neuen Methoden aus AP1 zum Einsatz kommen.

Von der Projektarbeit hat auch die Lehre und Ausbildung profitiert. Im Kontext dieses Projektes wurde eine Masterarbeit durchgeführt, außerdem wurde aufbauend auf den Ergebnissen dieses Projekts ein Promotionsvorhaben begonnen. Erkenntnisse des Projektes fließen regelmäßig in Vorlesungen und Vorträge ein.

Die Arbeit an diesem Projekt hat unsere Expertise in Fragen der Versorgungssicherheit und der Stabilität und Sicherheit der Stromnetzes gefestigt. Aufgrund dieser Expertise wurde Herr Prof. Dr. Witthaut wiederholt im Fernsehen (NDR, ZDF, RTL, n-tv), im Hörfunk (hr, WDR), in Zeitungen (Süddeutsche Zeitung, Wetzlarer Neue Zeitung) und Onlinemedien (RND, Tagesschau.de, ZDF heute) interviewt.

Bekannt gewordener Fortschritt anderer Stellen

Die dynamische Topologieoptimierung zur Minderung von Netzengpässen ist derzeit ein wichtiges Thema bei allen Übertragungsnetzbetreibern. Wir tragen zur Lösung dieses Problems mit unseren Ideen für die Entwicklung einer schnellen Lösungsmethode für die AC-Lastflussgleichungen (AP1) bei. Parallel werden bei unserem Kooperationspartner 50Hertz auch andere Verfahren erprobt.

Das Problem der Topologieoptimierung hat zudem auch andere Forschungsprojekte an anderen Stellen inspiriert. Hier ist zum Beispiel das Projekt InnOpTEM , gefördert durch das BMWK (Förderkennzeichen 03EI4056A), zu nennen. InnOpTEM verwendet allerdings einen

komplett anderen mathematischen Ansatz – die beiden Projekte sind daher inhaltlich komplett verschieden.

Notwendigkeit und Angemessenheit der geleisteten Arbeit

Das Projekt stellte Grundlagenforschung mit einer erheblichen Innovationshöhe dar und erzielt seinen Nutzen primär aus dem wissenschaftlichen Erkenntnisgewinn. Das Verbundprojekt brachte Ansätze der Mathematik, Informatik, Physik in ein klassisch ingenieurwissenschaftliches Feld. Mit Hilfe dieses neuartigen Aspekts wurden neue Methoden entwickelt und eine Reihe wichtiger Ergebnisse erzielt. Innerhalb einer sehr kurzen Projektlaufzeit konnten mit beschränkten Mitteln umfangreiche Ergebnisse erzielt und veröffentlicht werden.

Die in diesem Projekt erzielten grundlegenden Erkenntnisse und die entwickelten mathematischen Methoden bilden die Grundlage für die Übertragung der Methoden in die industrielle Anwendung. Wie oben dargestellt, wurden zu diesem Zweck Kooperationen mit drei Übertragungsnetzbetreibern aufgebaut. Langfristig kann diese Forschungstätigkeit einen gesamtgesellschaftlichen Nutzen in Deutschland erzielen: Eine dynamische Optimierung der Netztopologie kann Engpässe im Netz abmildern und somit die Kosten für das Engpassmanagement reduzieren.

Wichtigste Positionen des zahlenmäßigen Nachweises

Position	Entstandene Kosten (Euro)	Gesamtvorkalkulation (Euro)
0837 Personalkosten	121.721,07	114.690,29
Summe:	121.721,07	114.690,29

Referenzen

[1] Witthaut, D. *et al.* Collective nonlinear dynamics and self-organization in decentralized power grids. *Reviews of Modern Physics* **94**, 015005 (2022).

[2] Titz, M., Pütz, S. & Witthaut, D. Identifying drivers and mitigators for congestion and redispatch in the german electric power system with explainable ai. *Applied Energy* **356**, 122351 (2024).

[3] Orths, A. *et al.* Flexibility from energy systems integration: Supporting synergies among sectors. *IEEE Power and Energy Magazine* **17**, 67–78 (2019).

[4] Liu, D. *et al.* A hardware-in-the-loop co-simulation of multi-modal energy system for control validation. In *IECON 2021–47th Annual Conference of the IEEE Industrial Electronics Society*, 1–6 (IEEE, 2021).

[5] van Dijk, J., Westerbeck, N., Schewe, L., Benigni, A. & Witthaut, D. Unified algebraic deviation of distribution factors in linear power flow. *arXiv preprint arXiv:2412.16164* (2024).

[6] Bačić, I. *et al.* Existence of phase-cohesive solutions of the lossless power flow equations. *Authorea Preprints, DOI:10.36227/techrxiv.174611978.89382822/v1* (2025).

[7] Parameswaran, A., Bačić, I., Benigni, A. & Witthaut, D. Symmetry breaking in minimum dissipation networks. *arXiv preprint arXiv:2505.24818* (2025).

[8] Van Dijk, J., Viebahn, J., Cijsouw, B. & Van Casteren, J. Bus split distribution factors. *IEEE Transactions on Power Systems* **39**, 5115–5125 (2023).

[9] Zimmerman, R. D., Murillo-Sánchez, C. E. & Thomas, R. J. Matpower: Steady-state operations, planning, and analysis tools for power systems research and education. *IEEE Transactions on power systems* **26**, 12–19 (2010).

[10] Wood, A. J., Wollenberg, B. F. & Sheblé, G. B. *Power Generation, Operation and Control* (John Wiley & Sons, New York, 2014).

[11] Guler, T., Gross, G. & Liu, M. Generalized line outage distribution factors. *IEEE Transactions on Power systems* **22**, 879–881 (2007).

[12] Shapley, L. S. Quota solutions of n-person games. *Contributions to the Theory of Games* **2**, 343–359 (1953).

[13] Corson, F. Fluctuations and redundancy in optimal transport networks. *Physical Review Letters* **104**, 048703 (2010).

[14] Kaiser, F., Ronellenfitsch, H. & Witthaut, D. Discontinuous transition to loop formation in optimal supply networks. *Nature communications* **11**, 5796 (2020).

[15] Houghtalen, R. J., Osman, A. & Hwang, N. H. *Fundamentals of hydraulic engineering systems* (Pearson London, 2016).